

Rapport de stage

LES ZÉROS D'UNE SÉRIE ENTIÈRE GAUSSIENNE
-UN PROCESSUS DÉTERMINANTAL-

stage effectué en Juillet - Août 2004 sous la direction de André Goldman

Ion Alexandru NECHITA

Août, 2004

Table des matières

1	Processus ponctuel de Poisson	2
1.1	Rappels sur la loi de Poisson	2
1.2	Définition du PPP et propriétés de base	4
1.3	Construction du PPP homogène dans le plan	5
1.4	Construction du PPP dans le cas général	7
2	Processus ponctuels déterminantaux	10
2.1	Fonctions de corrélation	10
2.2	Processus déterminantaux. Définition et exemples	11
3	Les zéros d'une série entière gaussienne	13
3.1	Rappels sur les v.a. gaussiennes complexes. Rayon de convergence de $f_{\mathbb{U}}$	13
3.2	La fonction de corrélation des zéros	14
3.3	Les formules dans le cas i.i.d.; la nature déterminantale du processus	21

1 Processus ponctuel de Poisson

Dans cette partie d'introduction nous allons nous intéresser à un des processus les plus fondamentaux, à savoir le processus ponctuel de Poisson (PPP). On l'utilise pour modéliser des points jetés au hasard dans le plan sans aucune régularité ou modèle dans leur distribution. Ce processus est le plus simple à pouvoir modéliser une telle répartition, et sa caractéristique principale est *l'indépendance des points*.

Dans de nombreux cas pratiques, la présence de points (ainsi que leur répartition) dans une zone dépend de la présence (ainsi que de la répartition) des points qui se trouvent dans une région voisine. Il peut parfois y avoir des modèles géométriques qui se répètent. Le PPP ignore tous ces cas, étant la façon la plus aléatoire de modéliser un tel phénomène.

1.1 Rappels sur la loi de Poisson

La loi du Poisson est à la base du PPP. En voici la définition :

Définition 1.1 (loi de Poisson). *Une v.a. X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ d'intensité $\mu \geq 0$ si elle est à valeurs entières et*

$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$$

On peut étendre la définition au cas $\mu = \infty$, en disant que $\mathcal{P}(\infty)$ est une distribution concentrée en $+\infty$.

Voilà, sans preuve, quelques propriétés de la loi de Poisson :

Proposition 1.2. *Soit X une v.a. qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$. Alors :*

1. $\mathbb{E}(X) = \mu$.
2. $\mathbb{E}(X(X-1)(X-2)\dots(X-k)) = \mu^{k+1}$, pour tout $k \geq 0$.
3. $\text{var}(X) = \mu$.
4. *Si Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ , que X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit une loi $\mathcal{P}(\mu + \lambda)$.*

Le résultat suivant est beaucoup plus important. Il est à la base de la preuve de l'existence des PPP.

Proposition 1.3. *Soient $(X_i)_{i \leq 1}$ des v.a. indépendantes qui suivent respectivement des lois $\mathcal{P}(\mu_i)$ pour tout i . Si la somme*

$$\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

converge, alors

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$$

converge p.s., et S est une $\mathcal{P}(\sigma)$. Si la somme σ diverge, alors S diverge p.s.

Démonstration. En utilisant plusieurs fois le point 4 de la proposition précédente, on montre que, pour tout n ,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

est une v.a. de Poisson de paramètre

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Notons π_k la fonction continue $\lambda \mapsto e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{P}(S_n \leq r) = \sum_{k=0}^r \pi_k(\sigma_n).$$

A r fixé, les événements $\{S_n \leq r\}$ sont décroissants en fonction de n , et leur intersection est bien sur $\{S \leq r\}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(S \leq r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \leq r).$$

Si les σ_n convergent vers une limite finie σ , la continuité des π_k nous permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(S \leq r) = \sum_{k=0}^r \pi_k(\sigma)$$

et donc

$$\mathbb{P}(S = r) = \pi_r(\sigma) = e^{-\sigma} \frac{\sigma^r}{r!},$$

c'est à dire que S est finie p.s., de loi $\mathcal{P}(\sigma)$.

Si $\sigma_n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=0}^r \pi_k(\sigma_n) = e^{-\sigma_n} \sum_{k=0}^r \frac{\sigma_n^k}{k!} \rightarrow 0,$$

et donc

$$\mathbb{P}(S > r) = 0.$$

Comme l'égalité ci-dessus est vraie pour tout r , S diverge p.s., et ceci conclut la preuve. \square

1.2 Définition du PPP et propriétés de base

Comme tout processus stochastique à temps discret, le PPP est une collection

$$(X(n), n \in \mathbb{N}^*)$$

L'espace des états E des points d'un PPP est généralement l'espace Euclidien \mathbb{R}^d . Nous étudierons en détail le cas $d = 2$, mais la définition et les propriétés de base peuvent être énoncées dans le cas général.

Pour cela, on associe à E une tribu \mathcal{F} des ensembles mesurables. Celle-ci sera dans la plupart des cas la tribu borélienne.

Pour donner la définition d'un PPP $\Pi = (X(n))_{n \geq 1}$, il faut introduire la fonction de comptage $N : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{N}$:

$$N(A) = \text{card}\{\Pi \cap A\}$$

ou, de manière équivalente

$$N(A) = \sum_n 1_A(X_n).$$

Celle-ci fournit, pour tout mesurable A , une variable aléatoire à valeurs entières.

Définition 1.4 (processus ponctuel de Poisson). *Soit μ une mesure sur E . Un processus $\Pi = (X(n))_{n \geq 1}$ est un PPP d'intensité μ si :*

1. *Pour des mesurables disjoints A_1, A_2, \dots, A_n les v.a. $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ sont indépendantes.*
2. *Pour tout mesurable A de E , $N(A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$, avec $0 \leq \mu(A) \leq \infty$.*

Remarque 1.5. *Si la mesure μ est de la forme $\mu(A) = \lambda|A|$, avec $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue, le processus est dit homogène ou bien uniforme.*

Compte tenu de l'espérance d'une v.a. poissonnienne, la proposition suivante est évidente :

Proposition 1.6 (espérance de la fonction de comptage). *Si Π est un processus de Poisson, alors pour tout A mesurable on a*

$$\mathbb{E}(N(A)) = \mu(A).$$

1.3 Construction du PPP homogène dans le plan

Nous allons maintenant construire un cas particulier du PPP, peut être le plus intéressant et le plus spectaculaire. Il s'agit du PPP homogène dans le plan, c.à.d. un PPP avec intensité $\mu(A) = \lambda|A| = \lambda \cdot \text{aire}(A)$. Nous allons procéder de la manière suivante :

1. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ des v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.
2. On pose $R_n = \sqrt{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\lambda\pi}}$.
3. Soient $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n, \dots$ des v.a. uniformes sur $[0, 2\pi[$, indépendantes (entre elles-mêmes et avec les X_k).
4. On considère dans le plan \mathbb{R}^2 les points Z_n de coordonnées polaires (R_n, Θ_n) .

On peut alors faire quelques remarques qui seront utilisées dans la suite :

Remarque 1.7. *Les points Z_n sont ordonnés par rapport à leur distance de l'origine, car la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ est croissante.*

Remarque 1.8. *Le fait que les Θ_n sont des v.a.i.i.d. uniformes nous donne la symétrie de rotation du processus.*

On peut alors donner le résultat principal de cette partie :

Théorème 1.9 (existence du PPP homogène dans le plan). *Le processus $\Pi = (Z(n))_{n \geq 1}$ décrit ci-dessus est un PPP homogène d'intensité λ .*

Démonstration. La preuve comporte bien sûr deux parties : on montre tout d'abord que $N(A)$ suit une loi poissonnienne de paramètre $\lambda|A|$ pour tout borélien A du plan, et ensuite on montre l'indépendance des $N(A_i)$.

Commençons par montrer la deuxième assertion. Pour cela, on va d'abord traiter le cas de disques $D_a = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 | r \leq a\}$.

Lemme 1.10. *La v.a. $N(D_a)$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda\pi a^2)$ pour tout $a > 0$.*

Démonstration. Soit $n \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(D_a) = n) &= \mathbb{P}(R_1 \leq a, R_2 \leq a, \dots, R_n \leq a, R_{n+1} > a, R_{n+2} > a, \dots) \\
&= \mathbb{P}(R_n \leq a, R_{n+1} > a) \\
&= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq \lambda\pi a^2 < X_1 + \dots + X_n + X_{n+1}) \\
&= \int \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq \lambda\pi a^2 < X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} | \\
&\quad |X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{M_n(\lambda\pi a^2)} \mathbb{P}(X_{n+1} > \lambda\pi a^2 - x_1 - \dots - x_n) \cdot \\
&\quad \cdot e^{-x_1} \dots e^{-x_n} dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{M_n(\lambda\pi a^2)} e^{-\lambda\pi a^2 + x_1 + \dots + x_n} e^{-x_1} \dots e^{-x_n} \\
&= e^{-\lambda\pi a^2} \cdot |M_n(\lambda\pi a^2)|,
\end{aligned}$$

où $M_n(\alpha) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, \alpha]^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq \alpha\}$ (ici, α est un réel positif). Il reste donc à montrer que $|M_n(\alpha)| = \frac{\alpha^n}{n!}$ et la conclusion du lemme s'en suit.

Pour cela, nous allons raisonner par récurrence. Le cas $n = 1$ étant trivial, on calcule $|M_{n+1}(\alpha)|$ en fonction de $|M_n(\cdot)|$

$$\begin{aligned}
|M_{n+1}(\alpha)| &= |\{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in [0, \alpha]^{n+1} \mid y + \sum_{i=1}^n x_i \leq \alpha\}| = \\
&= \int_0^\alpha \int_{\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq \alpha - y\}} 1 \cdot dx_1 \dots dx_n \quad dy = \\
&= \int_0^\alpha |M_n(\alpha - y)| dy = \\
&= \int_0^\alpha \frac{(\alpha - y)^n}{n!} dy = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

et ceci conclut la preuve du lemme 1.10. \square

On a donc montré que, pour tous les *disques centrés à l'origine*, $N(A)$ suit une loi poissonnienne. Vu que la distribution de points admet une symétrie de rotation, le résultat reste valable pour les *secteurs de disques centrés à l'origine*. Comme la tribu borélienne est engendrée par ces secteurs de disques et la fonction $N(\cdot)$ est une fonction additive pour les ensembles, la première partie de l'assertion vient d'être montrée.

Passons maintenant à l'indépendance. Il faut montrer que si on se donne des mesurables disjoints A_1, A_2, \dots, A_n , alors les v.a. $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ sont indépendantes. On va utiliser de nouveau la symétrie de rotation du processus pour se ramener au cas des disques, plus précisément au cas des couronnes circulaires. S.p.d.g., on peut encore supposer que les A_k sont consécutives, i.e. $A_1 = D_{R_1}$, A_2 c'est la couronne des rayons R_1 et $R_1 + R_2$, etc. On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(A_1) = k_1, N(A_2) = k_2, \dots, N(A_n) = k_n) = \\ & = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{k_1} < \lambda\pi R_1 \leq X_1 + \dots + X_{k_1+1}, \\ & X_1 + \dots + X_{k_1+k_2} < \lambda\pi(R_1 + R_2) \leq X_1 + \dots + X_{k_1+k_2+1}, \\ & \dots \end{aligned}$$

$$X_1 + \dots + X_{k_1+\dots+k_n} < \lambda\pi(R_1 + \dots + R_n) \leq X_1 + \dots + X_{k_1+\dots+k_n+1}.$$

Pour finir, on utilise la formule

$$\mathbb{P}(E_1, \dots, E_n) = \mathbb{P}(E_n | E_1, \dots, E_{n-1}) \cdots \mathbb{P}(E_2 | E_1) \mathbb{P}(E_1),$$

et on tombe sur

$$\mathbb{P}(N(A_1) = k_1, N(A_2) = k_2, \dots, N(A_n) = k_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(N(A_i) = k_i),$$

d'où l'indépendance des $N(A_i)$. \square

1.4 Construction du PPP dans le cas général

Dans cette partie on va généraliser le résultat précédant, en se contentant de donner une preuve moins constructive. La démarche suivie ici est semblable à celle qu'on peut trouver dans [1].

Voici tout d'abord une proposition presque évidente qui donne une condition nécessaire sur la mesure μ :

Proposition 1.11. *Pour qu'une mesure μ soit l'intensité d'un PPP, il faut qu'elle soit non-atomique, c.à.d. il faut que $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in E$*

Démonstration. Soit $x \in E$. Comme $\text{card}(\{x\}) = 1$, si on note $m = \mu(\{x\})$ on a $0 = \mathbb{P}(N(\{x\}) \geq 2) = 1 - e^{-m} - me^{-m}$. On peut en déduire que $\mu(\{x\}) = 0$. \square

Nous allons prouver maintenant un théorème assez important pour la théorie des processus de Poisson. On utilise pour cela le lemme suivant, qu'on admettra (pour la preuve du lemme, qui est assez technique, voir [1]).

Lemme 1.12. Soient Π_1 et Π_2 deux PPP indépendantes sur E , et soit A un mesurable tel que $\mu_1(A)$ et $\mu_2(A)$ soient finis. Alors Π_1 et Π_2 sont p.s. disjoints sur A :

$$\mathbb{P}(\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A = \emptyset) = 1.$$

Théorème 1.13 (principe de superposition). Soit $(\Pi_i)_{i \leq 1}$ une famille dénombrable des PPP indépendantes d'intensités $(\mu_i)_{i \leq 1}$. Alors le processus

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Pi_i$$

est un PPP d'intensité

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

Démonstration. Soit $N_i(\cdot)$ la fonction de comptage du processus Π_i . Si $\mu_i(A) < \infty$ pour tout i , le lemme précédent nous dit que les processus Π_i sont disjoints sur A p.s., donc

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(A).$$

Par la proposition 1.3 on trouve alors le résultat voulu.

Sinon, il existe un i_0 tel que $\mu_{i_0}(A) = \infty$, et donc $N_{i_0}(A) = N(A) = \infty$ et la conclusion est alors triviale.

Il nous reste maintenant à montrer que les v.a. $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_k)$ sont indépendantes si les mesurables A_1, A_2, \dots, A_k sont disjoints. Pour cela, considérons les variables $N_i(A_j)$, avec $i = 1, 2, \dots$ et $j = 1, 2, \dots, k$. Évidemment, elles sont indépendantes, et comme les $N(A_j)$ sont des sommes disjointes de ces v.a., la conclusion s'ensuit. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat d'existence des PPP dans le cas général :

Théorème 1.14 (existence des PPP - cas général). Soit μ une mesure non-atomique sur E qui peut être mise sous la forme

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \quad \text{avec } \mu_n(E) < \infty \text{ pour tout } n.$$

Alors il existe un PPP sur E ayant μ comme intensité.

Démonstration. S.p.d.g. on peut supposer que $\mu_n(E) > 0$ pour tout n . On considère les v.a. N_n et X_{nr} pour $n, r \in \mathbb{N}^*$ telles que N_n suit une loi $\mathcal{P}(\mu_n(E))$ et X_{nr} suit la loi

$$p_n(\cdot) = \frac{\mu_n(\cdot)}{\mu_n(E)}$$

On pose

$$\Pi_n = \{X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nN_n}\} \quad \text{et} \quad \Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n.$$

On appelle $N_n(A) = \text{card}(\{\Pi_n \cap A\})$ la fonction de comptage du processus Π_n . Pour des mesurables disjoints A_1, A_2, \dots, A_k , on note A_0 le complémentaire de leur réunion. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k | N_n = m) &= \\ &= \frac{m!}{m_0! m_1! m_2! \dots m_k!} p_n(A_0)^{m_0} p_n(A_1)^{m_1} \dots p_n(A_k)^{m_k} \end{aligned}$$

pour $m_0 = m - m_1 - m_2 - \dots - m_k$.

En notant π_k la fonction $\lambda \mapsto e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k) &= \\ &= \sum_{m=\sum m_j}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n(E)} \mu_n(E)^m}{m!} \frac{m!}{m_0! m_1! m_2! \dots m_k!} \prod_{j=0}^k p_n(A_j)^{m_j} \\ &= \sum_{m=\sum m_j}^{\infty} \pi_{m-\sum m_j}(\mu_n(A_0)) \prod_{j=0}^k \pi_{m_j}(\mu_n(A_j)) \\ &= \prod_{j=0}^k \pi_{m_j}(\mu_n(A_j)). \end{aligned}$$

Les $N_n(A_j)$ sont donc des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{P}(\mu_n(A_j))$, et les Π_n des PPP d'intensités μ_n . Le théorème de superposition 1.13 appliqué aux Π_n nous fournit l'argument qui conclut la preuve. \square

Remarque 1.15. L'hypothèse $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$, avec $\mu_n(E) < \infty$ est plus forte que la σ -finitude de E . Donc la conclusion reste vraie dans le cas d'un espace E σ -fini.

2 Processus ponctuels déterminantaux

Dans cette partie on va étudier une classe importante des processus ponctuels, les processus ponctuels déterminantaux. Il y a des fortes liaisons entre ces processus et les matrices aléatoires, d'où l'intérêt de les étudier. On va d'abord introduire un outil assez important dans lui-même, les fonctions de corrélation, et puis introduire la définition des processus déterminantaux, quelques exemples et propriétés de base. On va suivre la démarche dans [5].

Pour commencer, on va donner une définition plus générale d'un processus ponctuel :

Définition 2.1. Soit E un espace et X un ensemble de parties finies ou dénombrables de E . On va munir X de la tribu \mathcal{B} engendré par les cylindres $C_n^B = \{\xi \in X | N(B)(\xi) = n\}$, où B c'est un borélien borné et $n \geq 0$.

Un processus ponctuel c'est un espace probabilisé $(X, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, où \mathbb{P} est une mesure de probabilités sur \mathcal{B} .

2.1 Fonctions de corrélation

Intuitivement, soient dx_i , $i = 1, 2, \dots, n$ des ensembles infinitésimaux disjoints autour des x_i . On suppose que la probabilité de trouver exactement un point du processus dans chaque dx_i est proportionnelle à $\prod_{i=1}^n \mu(dx_i)$, et on écrit

$$\mathbb{P}(N(dx_i) = 1, i = 1, 2, \dots, n) = \rho_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n),$$

où $\rho_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sera la fonction de corrélation d'ordre n du processus.

Passons à la définition rigoureuse et générale, qui est équivalente, d'une façon triviale à celle ci-dessus :

Définition 2.2 (fonctions de corrélation). Une fonction localement intégrable $\rho_n : E^n \mapsto [0, \infty]$ est appelée la fonction de corrélation d'ordre n d'un processus ponctuel sur E si pour tous boréliens disjoints B_1, B_2, \dots, B_m et pour tous $n_i > 0$ tels que $\sum_{i=1}^m n_i = n$ on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m \frac{(N(B_i))!}{(N(B_i) - n_i)!}\right) = \int_{B_1^{n_1} \times \dots \times B_m^{n_m}} \rho_n(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n)$$

On peut toute de suite en tirer une propriété évidente à prouver :

Proposition 2.3. La fonction ρ_1 est la densité des points, i.e. pour tout borélien B borné, on a

$$\mathbb{E}(N(A)) = \int_A \rho_1(x) d\mu(x)$$

Le problème d'existence et de l'unicité d'un processus ponctuel défini par ses fonctions de corrélation a été étudié par Lenard dans [9]. Il a trouvé des conditions nécessaires et suffisantes qu'on énoncera sans preuve.

Théorème 2.4 (Lenard). *Des fonctions localement intégrables $\rho_n : E^n \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ sont les fonctions de corrélation d'un processus ponctuel ssi les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. **Condition de symétrie**

ρ_n est invariante sous l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , c.à.d.,

$$\rho_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \rho_n(x_1, \dots, x_n) \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

2. **Condition de positivité**

Pour tout ensemble de fonctions mesurables bornées à support compact $\varphi_k : E^k \mapsto \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, N$, telles que

$$\varphi_0 + \sum_{k=1}^N \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} \varphi_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \geq 0 \quad \forall \xi = (x_i) \in X$$

Remarque 2.5. *La partie nécessaire du théorème est facile à prouver car les deux conditions ci-dessus ont une interprétation probabiliste évidente ; la première vient directement de la définition, et la deuxième veut simplement dire que l'espérance d'une certaine famille des v.a. positives doit être positive.*

2.2 Processus déterminantaux. Définition et exemples

Commençons par donner la définition d'un processus déterminantal :

Définition 2.6. *Un processus ponctuel sur E est dit déterminantal si ses fonctions de corrélation peuvent être exprimées à l'aide d'un déterminant*

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \quad \forall x_1, \dots, x_n \in E,$$

où $K(x, y)$ est le noyau intégral d'un opérateur $K : L^2(E, d\mu) \mapsto L^2(E, d\mu)$, positive et localement de trace finie.

Remarque 2.7. *La positivité est demandée parce que les fonctions de corrélation sont positives, et la deuxième condition veut simplement dire que les configurations des points du processus sont localement finies. Par exemple, si*

$E = \mathbb{R}^n$ et $d\mu = d^n x$ on peut montrer (voir [5]) qu'on peut choisir le noyau $K(x, y)$ de telle façon qu'on ait

$$\text{Trace}(K\chi_B) = \int_B K(x, x) d^d x,$$

avec $\chi_B(x)$ la fonction indicatrice du borélien B . Comme $K(x, x) = \rho_1(x)$ est la densité du processus en x , la dernière intégrale est finie, d'où la conclusion que K est localement de trace finie.

Le fait qu'on processus soit déterminantal nous donne un outil puissant pour examiner de plus près celui-ci. Par exemple, on peut montrer (voir [3]) que, pour tout borélien B on a :

$$\mathbb{P}(N(B) = 0) = \det(1 - K)_{L^2(B, d\mu)}.$$

Nous, on va s'intéresser dans la partie qui suit au processus des zéros d'une série aléatoire, et on va voir que ce processus est déterminantal, de noyau $K(z, w) = \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}$.

3 Les zéros d'une série entière gaussienne

Dans cette dernière partie on va essayer de suivre l'article de Peres et Virág [2], en explicitant les preuves. Il s'agit donc de l'étude d'une série entière

$$f_{\mathbb{U}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où les coefficients a_n sont des v.a.i.i.d. complexes normales standard.

On s'intéresse au processus $Z_{\mathbb{U}}$ des zéros de cette série. Le résultat principal de [2] est le fait que ce processus est déterminantal et il est généré par le noyau de Bergman $\frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}$ dans le disque unité.

3.1 Rappels sur les v.a. gaussiennes complexes. Rayon de convergence de $f_{\mathbb{U}}$

On va commencer en faisant quelques rappels sur les v.a. normales complexes et on va utiliser la loi du 0 - 1 pour trouver le rayon de convergence de la série $f_{\mathbb{U}}$.

Définition 3.1. Une v.a. complexe $X : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ est dite normale standard si elle admet la densité

$$f_X(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$$

Remarque 3.2. On peut regarder une v.a. complexe normale standard comme un vecteur aléatoire gaussien de dimension 2 et de matrice de covariance

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En effet, si c'est le cas, on a

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(M^{-1})}} e^{-\frac{1}{2} \cdot x^t \cdot M^{-1} \cdot x}$$

et on tombe sur l'égalité de la définition. On peut remarquer que la partie réelle et la partie imaginaire sont des v.a. normales réelles indépendantes de variance 1/2.

On passe ensuite à énoncer une propriété importante :

Proposition 3.3. Si X est une gaussienne standard complexe, alors

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X\bar{X}) = \mathbb{E}(|X|^2) = 1$$

Démonstration. Notons $a = \Re(X)$ et $b = \Im(X)$. Alors $\mathbb{E}(X\bar{X}) = \mathbb{E}(a^2 + b^2) = \mathbb{E}(a^2) + \mathbb{E}(b^2) = 1/2 + 1/2 = 1$. \square

On s'intéresse maintenant au rayon de convergence de la série $f_{\mathbb{U}}$, qu'on va noter R . Évidemment, R est une v.a. à valeurs dans $[0, \infty]$. Le lemme suivant nous donne le résultat voulu :

Lemme 3.4. *Si R est le rayon de convergence de la série $f_{\mathbb{U}}$, alors $R = 1$ (p.s.).*

Démonstration. On va d'abord remarquer que l'événement $\{R \leq a\}$ (pour a réel positif) ne dépend pas des premiers termes de la série, donc il fait partie de la tribu finale, et alors, par la loi du 0 - 1 du Kolmogorov, on a $\mathbb{P}(R \leq a) \in \{0, 1\}$. Donc la v.a. R est concentrée en un point qu'on va noter pareil, R . Il reste à montrer que $R = 1$.

Pour cela, il suffit de voir que les coefficients de la série $f_{\mathbb{U}}(z)$ sont des v.a. uniformément distribuées et de module borné en espérance, donc $\mathbb{E}\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = 1$. La conclusion s'ensuit par le théorème de d'Alembert. \square

3.2 La fonction de corrélation des zéros

Le but de cette partie c'est de trouver une expression pour la fonction de corrélation des zéros d'une fonction gaussienne analytique. Rappelons déjà ce que ça veut dire une telle fonction :

Définition 3.5. *Soit D un domaine du \mathbb{C} . Une fonction gaussienne analytique sur D est une fonction aléatoire analytique sur D $f : D \mapsto \mathbb{C}$, telle que pour tout choix des z_1, \dots, z_n dans D , le vecteur $(f(z_1), \dots, f(z_n))$ a une distribution normale.*

Le résultat principal de cette partie c'est le théorème suivant :

Théorème 3.6. *Soit f une fonction gaussienne analytique sur D , domaine de \mathbb{C} , et z_1, \dots, z_n des points dans D . On considère les matrices*

$$A = (\mathbb{E}f(z_i)\overline{f(z_j)})_{ij}; \quad B = (\mathbb{E}f(z_i)\overline{f'(z_j)})_{ij}; \quad C = (\mathbb{E}f'(z_i)\overline{f'(z_j)})_{ij}.$$

Supposons que A est inversible. Alors la fonction de corrélation des zéros de f est donnée par

$$\rho_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\pi^n} \frac{\text{perm}(C - BA^{-1}B^*)}{\det(A)}$$

La preuve de ce théorème est très technique et comporte plusieurs étapes. Commençons par préciser la notion de permutant :

Définition 3.7. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice d'ordre n . On définit alors le permutant de A :

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

Remarque 3.8. On voit que, par rapport à la définition du déterminant, il manque les $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

L'approche de Peres et Virág dans [2] consiste en utiliser le théorème de Rouché pour approximer $f_{\mathbb{U}}$ autour des z_k par des fonctions linéaires $z \mapsto f(z_k) + f'(z_k)(z - z_k)$. On va énoncer et montrer plusieurs lemmes, et la conclusion s'en suivra trivialement.

On va commencer par une lemme sur les fonctions aléatoires linéaires :

Lemme 3.9. Soient $F_k(z) = A_k \cdot z + B_k$, $1 \leq k \leq n$ des fonctions complexes linéaires telles que tous les $2n$ coefficients A_k, B_k sont des v.a.i.i.d. complexes gaussiennes. Soit Z_k la racine de F_k . On note g_{AB} la densité jointe des A_k, B_k , et pareil pour g_{AZ}, g_A, g_B , etc. Alors la densité jointe des Z_k est continue et vérifie

$$g_Z(0, \dots, 0) = \mathbb{E}(|A_1 \cdots A_n|^2 | B_1 = \dots = B_n = 0) g_B(0, \dots, 0)$$

Démonstration. On considère la transformation affine J donnée par $(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) \mapsto (A_1, \dots, A_n, Z_1, \dots, Z_n)$. La formule de changement des variables nous donne $g_{AZ} = g_{AB}/|J|$, où $|J| = 1/|A_1 \cdots A_n|$.

Pour avoir la loi marginale des Z_k , on intègre par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} g_Z(z_1, \dots, z_n) &= \int g_{AZ}(a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n) da_1 \cdots da_n \\ &= \int g_{AB}(a_1, \dots, a_n, -a_1 z_1, \dots, -a_n z_n) |a_1 \cdots a_n|^2 da_1 \cdots da_n. \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, celle-ci est une fonction continue, et le résultat s'obtient pour $z_1 = \dots = z_n = 0$:

$$\begin{aligned} g_Z(0, \dots, 0) &= g_B(0, \dots, 0) \int g_{A|B_1=\dots=B_n=0}(a_1, \dots, a_n) |a_1 \cdots a_n|^2 da_1 \cdots da_n \\ &= \mathbb{E}(|A_1 \cdots A_n|^2 | B_1 = \dots = B_n = 0) g_B(0, \dots, 0). \end{aligned}$$

□

Énonçons maintenant l'inégalité isopérimétrique de Borell, avec un corollaire sur la déviation du maximum par rapport à la médiane d'une famille des v.a. :

Théorème 3.10 (inégalité isopérimétrique de Borell). *Soit A un borélien de \mathbb{R}^n , γ_n la loi normale standard $\mathcal{N}(0, I_n)$, Φ la fonction de distribution de la normale standard dans \mathbb{R} et $A_r = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq r\}$ un voisinage de A . Alors, si $\gamma_n(A) \leq \Phi(\alpha)$, on a $\gamma_n(A_r) \leq \Phi(\alpha + r)$.*

Démonstration. Voir [6] □

Corollaire 3.11. *Soit Y_1, \dots, Y_n une famille des v.a. normales de variance maximale σ^2 , et S leur maximum, i.e. $S = \max_{1 \leq i \leq n} |Y_i|$. Si M est une médiane de S , alors*

$$\mathbb{P}(S > M + r) \leq \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \leq r)$$

et, d'une façon analogue,

$$\mathbb{P}(S < M - r) \leq \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \geq -r).$$

Démonstration. Rappelons que la médiane d'une v.a. réelle X est un nombre m (pas forcément unique, mais qui existe toujours) tel que $\mathbb{P}(X \leq m) \leq 1/2$ et $\mathbb{P}(X \geq m) \leq 1/2$.

On peut bien sûr exprimer les Y_i en fonction des v.a.i.i.d. normales standard $Y_i(x) = \mu_i + \theta_i^t x$ dans \mathbb{R}^n muni de la mesure $\gamma_n = \mathcal{N}(0, I_n)$. Par l'hypothèse, on a $\text{var}(Y_i) = |\theta_i|^2 \leq \sigma^2$.

De la définition de la médiane M , on déduit que l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} Y_i(x) \leq M\}$$

a la propriété $\gamma_n(A) \leq 1/2 = \Phi(0)$. Si un point x se trouve à une distance plus petite que r d'un point x_0 de A , on a $|\theta_i^t x - \theta_i^t x_0| \leq |\theta_i| |x - x_0| \leq \sigma r$, pour tout i . Donc le voisinage A_r est contenu dans $\{x : \max_{1 \leq i \leq n} |Y_i| \leq M + \sigma r\}$, et on conclut :

$$\mathbb{P}(x : \max_{1 \leq i \leq n} |Y_i| \leq M + \sigma r) \geq \gamma_n(A_r) \geq \Phi(0 + r).$$

□

On utilise le résultat ci-dessus pour montrer un lemme important dans notre démarche :

Lemme 3.12. *Soit f une fonction gaussienne analytique (pas nécessaire de moyenne 0) de rayon de convergence $r_0 > r$ et soit S le maximum de son module dans le disque fermé de rayon r . Il existe alors des constantes $c, \gamma > 0$ telles que pour tout $x > 0$ on ait*

$$\mathbb{P}(S > x) \leq ce^{-\gamma x^2}.$$

Démonstration. Remarquons déjà que $S < \infty$ p.s. donc une médiane de S , qu'on va noter M est aussi finie. Par le résultat précédent, on trouve

$$\mathbb{P}(S > M + r\sigma) \leq \mathbb{P}(N > r),$$

où N est la normale standard réelle $\mathcal{N}(0, 1)$. On note $x = M + r\sigma$, et Φ la densité de N . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > x) &\leq \mathbb{P}(N > \frac{x - M}{\sigma}) = \int_{\frac{x-M}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &\leq \int_{\frac{x}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2} \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}. \end{aligned}$$

Pour finir, il suffit de noter

$$c = e^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

□

Passons maintenant à une preuve plus technique :

Lemme 3.13. *Soit $f = a_0 + a_1z + \dots$ une fonction gaussienne analytique avec a_0 non constant. On considère l'événement A_ε "le nombre des zéros de $f(z)$ et de $h(z) = a_0 + a_1z$ dans la boule centrée dans l'origine et de rayon ε , B_ε , est le même". Alors*

1. *Pour tout $\delta > 0$, il existe $c > 0$ (qui dépend continûment de la fonction de covariance de f) tel que pour tout $\varepsilon > 0$, assez petit, on a*

$$\mathbb{P}(A_\varepsilon) \leq c\varepsilon^{3-2\delta}.$$

2. $\mathbb{P}(A_\varepsilon | a_1, a_2, \dots) \leq C\varepsilon^3$, où C peut dépendre des a_1, a_2, \dots , mais il est p.s. fini.

Démonstration. Pour la première partie, on va appliquer le théorème de Rouché : si $|h| < |f - h|$ sur le cercle ∂B_ε , alors f et h ont le même nombre des zéros dans B_ε . Pour cela, par le lemme 3.12, on a :

$$\mathbb{P}(\max_{z \in \partial B_\varepsilon} |f(z) - h(z)| > \varepsilon^{2-\delta}) < c_0 e^{-\gamma \varepsilon^{-\delta}} < c_1 e^3. \quad (1)$$

On considère maintenant la couronne $R = \partial B_{a_1 \varepsilon} + B_{\varepsilon^{2-\delta}}$, et on définit les événements

$$\begin{aligned} D &= \{|a_0| < 2\varepsilon^{1-\delta}\} \\ E &= \{|a_1| < \varepsilon^{-\delta}\} \\ F &= \{\min_{z \in \partial B_\varepsilon} |h(z)| < \varepsilon^{2-\delta}\} \end{aligned}$$

Après des majoration sur les modules, on trouve facilement que $F = \{-a_0 \in R\}$ et que $E \cap F \subset D$; pareil, un calcul simple nous montre que $\mathbb{P}(E^c) \leq c_2 e^3$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F \cap E | D) &= \mathbb{P}(-a_0 \in R, E | D) \leq c_3 \frac{\lambda_2(R)}{\lambda_2(B_{2\varepsilon^{1-\delta}})} \\ &\leq c_4 \frac{\varepsilon^{3-\delta}}{\varepsilon^{2-\delta}} = c_4 \varepsilon. \end{aligned}$$

Un calcul sur les événements nous montre que $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}((E \cap F) \sqcup (E^c \cap F)) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E^c \cap F) \leq \mathbb{P}(E \cap F | D) \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(E^c)$, et donc

$$\mathbb{P}(F) \leq c_4 \varepsilon c_5 \varepsilon^{2-2\delta} + c_2 \varepsilon^3 \leq c_6 \varepsilon^{3-2\delta}. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) nous fournissent la conclusion de la première assertion. En ce qui concerne la deuxième, c'est plus simple : il faut juste regarder l'équation (1) et l'événement F , qui dépend que de a_0 . Un calcul direct nous donne la réponse. \square

On énonce maintenant le lemme qui nous donne l'approximation pour la fonction de corrélation :

Lemme 3.14. *Soit f une fonction gaussienne analytique telle que $f(z_1), \dots, f(z_n)$ sont linéairement indépendantes. On note g la densité conjointe des $f(z_1), \dots, f(z_n)$ et F l'événement " f a un zéro dans $B_\varepsilon(z_1), \dots, B_\varepsilon(z_n)$ ". Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a*

$$\mathbb{P}(F) = (\pi \varepsilon^2)^n \mathbb{E}(|f'(z_1) \cdots f'(z_n)| | f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0) g(0, \dots, 0) + o(\varepsilon^{2n}).$$

Démonstration. Soit A l'événement dans la partie gauche et soient

$$f_j(z) = f(z_j) + f'(z_j)(z - z_j), \quad 1 \leq j \leq n$$

les approximations du premier ordre de f autour des z_j . En utilisant le lemme 3.9 la probabilité de l'événement D que pour tout j la fonction f_j a exactement un zéro dans $B_\varepsilon(z_j)$ est donnée par la partie droite. Il reste donc à montrer que la différence symétrique est négligeable, i.e. $\mathbb{P}(A \Delta D) = o(\varepsilon^{2n})$.

Pour cela, on introduit les événements $\Gamma_k = \{\text{le nombre des zéros de } f_k \text{ et } f \text{ dans } B_\varepsilon(z_k) \text{ est différent}\}$. L'inclusion suivante est trivialement vraie :

$$A \setminus D \subset \bigcup_{k=1}^n (A \cap \Gamma_k).$$

Donc, pour borner $\mathbb{P}(A \setminus D)$, on va borner chaque $\mathbb{P}(A \cap \Gamma_k)$. On fixe k et on pose

$$\begin{aligned} G_j &= \{ \max_{z \in B_\varepsilon(z_j)} |f(z) - f(z_j)| < \varepsilon^{1-\delta} \}, \\ G &= G_1 \cap \dots \cap G_n, \\ H &= \{|f(z_j)| \leq \varepsilon^{1-\delta} \quad \forall j \neq k\}. \end{aligned}$$

Par le lemme 3.12, pour n et $\delta > 0$ fixés, $\mathbb{P}(G_j^c) = O(e^{-\varepsilon^{-2\delta}})$, et donc, étant donné que G^c est une réunion finie de G_j^c , on a

$$\mathbb{P}(G^c) = O(e^{-\varepsilon^{-2\delta}}).$$

Par l'indépendance linéaire des $f(z_j)$, on a

$$\mathbb{P}(H) = O((\varepsilon^{2-2\delta})^{n-1}) = O(\varepsilon^{2(n-1)(1-\delta)}).$$

Si A est réalisé, f a un zéro w_j dans chaque $B_\varepsilon(z_j)$. Si, en plus, G est réalisé,

$$|f(z_j)| = |f(z_j) - f(w_j)| \leq \max_{z \in B_\varepsilon(z_j)} |f(z) - f(z_j)| < \varepsilon^{1-\delta},$$

donc H est réalisé. On vient de montrer $G \cap A \subset H$.

Pour calculer $\mathbb{P}(\Gamma_k)$, on va conditionner sur les valeurs des $f(z_j)$. Par le lemme précédent, on a

$$\mathbb{P}(\Gamma_k | f(z_j) = v_j \quad \forall j \neq k) = O(\varepsilon^{3-\delta}).$$

Ici, la constante dans le "O" peut dépendre des v_j , mais d'une façon continue. Vu que les v_j se trouvent dans des ensembles compacts, on peut majorer uniformément, et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \Gamma_k) &= \mathbb{P}(G \cap A \cap \Gamma_k) + \mathbb{P}(G^c \cap A \cap \Gamma_k) \\ &\leq \mathbb{P}(H \cap \Gamma_k) + \mathbb{P}(G^c) \\ &= \mathbb{P}(\Gamma_k | H) \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(G^c) \\ &= O(\varepsilon^{3-\delta} \varepsilon^{2(n-1)(1-\delta)}) + O(e^{-\varepsilon^{-2\delta}}) \\ &= O(\varepsilon^{2n+1-n\delta}). \end{aligned}$$

En faisant une somme sur k , on trouve une première inégalité : $\mathbb{P}(A \setminus D) = O(\varepsilon^{2n+1-n\delta})$. Pour trouver la deuxième, on écrit

$$D \setminus A \subset \bigcup_{k=1}^n (D \cap \Gamma_k).$$

On procède d'une façon analogue, en remplaçant à chaque fois f par l'approximation f_j . À la fin, on trouve pareil, $\mathbb{P}(D \setminus A) = O(\varepsilon^{2n+1-n\delta})$, et la conclusion s'ensuit. \square

Avant de donner le dernier argument qui va conclure la preuve du théorème principal, on énonce un résultat sur les v.a. gaussiennes complexes, important en lui-même :

Proposition 3.15. *Si Z_1, \dots, Z_n sont des v.a. gaussiennes complexes avec une matrice de covariance Σ , $\mathbb{E}(|Z_1 \cdots Z_n|^2) = \text{perm}(\Sigma)$.*

Démonstration. On va montrer un résultat encore plus général : si Z_j, W_j sont des v.a. complexes de loi conjointe normale et de moyenne 0, alors

$$\mathbb{E}(Z_1 \cdots Z_n \overline{W}_1 \cdots \overline{W}_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^n \mathbb{E}(Z_j \overline{W}_{\sigma(j)}) = \text{perm}(\mathbb{E}(Z_j \overline{W}_k))_{jk}.$$

Pour commencer, remarquons que les deux membres sont linéaires en chaque Z_j et \overline{W}_j , donc on peut les exprimer dans une base orthonormale des gaussiennes standard indépendantes $\{V_j\}$. On va montrer la formule par récurrence sur le nombre total de coefficients non nuls qui apparaissent dans l'écriture des Z_j et des \overline{W}_j dans la base $\{V_j\}$.

Si pour un des Z_j ou un des \overline{W}_j ce nombre est plus grand que 1, on utilise la linéarité, l'indépendance des V_j et l'hypothèse de récurrence. Sinon, il vaut

0 ou 1 pour tous les Z_j et \overline{W}_j . De nouveau on utilise l'indépendance et on voit qu'il suffit de vérifier

$$\mathbb{E}(V^n \overline{V}^m) = n! \delta_{n,m}.$$

Si $n \neq m$, en faisant une intégration radiale et angulaire, et compte tenu de la symétrie rotationnelle de V , l'espérance vaut 0. Sinon, $\mathbb{E}(|V|^{2n})$ se calcule en tenant compte du fait que $|V|$ admet une distribution exponentielle de moyenne 1. Un résultat classique nous donne la réponse :

$$\mathbb{E}(|V|^{2n}) = n!.$$

□

On est maintenant en mesure de conclure la preuve du théorème 3.6, qui donne les fonctions de corrélation du processus des zéros. La lemme 3.14 nous donne la probabilité cherchée en utilisant une espérance et une loi conjointe :

$$(\pi \varepsilon^2)^n \mathbb{E}(|f'(z_1) \cdots f'(z_n)| | f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0) g(0, \dots, 0).$$

La densité du vecteur gaussien $(f(z_j))_{1 \leq j \leq n}$ dans l'origine est donnée par

$$g(0, \dots, 0) = \pi^{-n} (\det A)^{-1},$$

et il reste donc à calculer l'autre facteur. Évidemment, vu le dernier lemme, il suffit de trouver la matrice de covariance des $f'(z_j)$ conditionnement à $f(z_j) = 0$. Celle ci vaut bien $C - BA^{-1}B^*$, et la conclusion du théorème 3.6 s'en suit naturellement.

3.3 Les formules dans le cas i.i.d. ; la nature déterminantale du processus

En vertu du résultat principal de la section qui précède, on a trouvé les fonction de corrélation du processus étudié :

$$\rho_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\pi^n} \frac{\text{perm}(C - BA^{-1}B^*)}{\det(A)}.$$

On va présenter dans cette section une caractérisation plus précise de cette fonction obtenu dans [2] à l'aide des outils algébriques. On va considérer dans la suite que les a_n qui apparaissent dans l'expression de f_U sont des v.a.i.i.d. gaussiennes standard complexes.

Dans ce cas, on a les formes explicites suivantes des matrices A , B et C :

$$\begin{aligned} A_{jk} &= 2\pi\mathbb{E}(f(z_j)\overline{f(z_k)}) = \frac{1}{1 - z_j\overline{z_k}}, \\ B_{jk} &= 2\pi\mathbb{E}(f(z_j)\overline{f'(z_k)}) = \frac{\overline{z_k}}{(1 - z_j\overline{z_k})^2}, \\ C_{jk} &= 2\pi\mathbb{E}(f'(z_j)\overline{f'(z_k)}) = -\frac{1 + z_j\overline{z_k}}{(1 - z_j\overline{z_k})^3}. \end{aligned}$$

Ces formules s'obtiennent facilement à partir de la relation suivante qui a lieu pour z et w donnés :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f_{\mathbb{U}}(z)\overline{f_{\mathbb{U}}(w)}) &= \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} \cdot \overline{w^m}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}\left(\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} z^n \overline{w^m}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (z\overline{w})^n\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(|a_n|^2) (z\overline{w})^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (z\overline{w})^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - z\overline{w}}, \end{aligned}$$

où on reconnaît le noyau de Bergman. En dérivant plusieurs fois cette égalité, on obtient des résultats pareils pour les matrices B et C .

La démarche dans [2] utilise d'une manière essentielle le résultat suivant, qu'on va se contenter d'énoncer :

Proposition 3.16 (identité de Borchardt). *Soient M et N les matrices données par $M_{jk} = (x_j + y_k)^{-1}$ et $N_{jk} = (x_j + y_k)^{-2}$, où les x_j et y_k sont des éléments de \mathbb{C} tels que les deux matrices existent. Alors*

$$\det(M)\text{perm}(M) = \det(N)$$

En utilisant ce résultat, et après plusieurs étapes techniques, les auteurs arrivent au théorème suivant, le plus important dans l'article cité :

Théorème 3.17. *Les fonctions de corrélation du processus des zéros du $f_{\mathbb{U}}$ dans le disque unité existent et satisfont*

$$\rho_n(z_1, \dots, z_n) = \pi^{-n} \det \left[\frac{1}{(1 - z_j \bar{z}_k)^2} \right]_{jk}.$$

Ceci nous donne le fait que le processus étudié est un processus déterminantal qui admet comme noyau celui de Bergman $(z, w) \mapsto \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}$. Dans la suite de l'article, les auteurs généralisent ce résultat sur le disque unité en remplaçant celui-ci par un domaine quelconque D du plan complexe.

Références

- [1] S. Kingman, *Poisson Processes*, Addison-Wesley, 1993.
- [2] Y. Peres, B. Virág, *Zeroes of the i.i.d. Gaussian power series : a conformally invariant determinantal process*, arXiv :math.PR/0310297, 2003.
- [3] P. Ferrari, *Random matrices and determinantal processes*.
- [4] A. Soshnikov, *Gaussian limit for determinantal random point fields*, The Annals of Probability Vol. 30, 2002.
- [5] A. Soshnikov, *Determinantal random point fields*, Math. Surveys Vol. 5, 2000.
- [6] D. Pollard, *A user's guide to measure theoretic probability*, Cambridge University Press, 2002.
- [7] M. Sodin, B. Tsirelson, *Random complex zeroes, I. Asymptotic normality*, arXiv :math.CV/0210090, 2003.
- [8] B. Shiffman, S. Zelditch, *Equilibrium distribution of zeroes of random polynomials*, arXiv :math.CV/0206162, 2003.
- [9] A. Lenard, *States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles I, II*, Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 59, 1975.