Transformations de l'intrication quantique

Ion Nechita[1]

[1]Institut Camille Jordan, Université Lyon 1
Travail en collaboration avec Guillaume AUBRUN (ICJ)

Grenoble, 15 Mai 2007

Le modèle

Intrication quantique - une ressource précieuse

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous différentes formes dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

Intrication quantique - une ressource précieuse

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous différentes formes dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

Intrication quantique - une ressource précieuse

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous différentes formes dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

Intrication quantique - une ressource précieuse

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous différentes formes dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

Intrication quantique - une ressource précieuse

L'intrication quantique

- est une des principales sources de l'étrangeté quantique;
- est une ressource essentielle dans la téléportation quantique, le codage dense, etc.;
- est indispensable au speed-up des algorithmes quantiques;
- est présente sous différentes formes dans la nature.

Question

Transformer l'intrication ?

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des opérations locales et de la communication classique (LOCC).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
  2. mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des opérations locales et de la communication classique (LOCC).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
  2. mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des opérations locales et de la communication classique (LOCC).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
  2. mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des opérations locales et de la communication classique (LOCC).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
  2. mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des opérations locales et de la communication classique (LOCC).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
  2. mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

Transformations LOCC

- Alice et Bob partagent un état biparti $|\phi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.
- Ils veulent transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$ en utilisant que des opérations locales et de la communication classique (LOCC).
- Opérations locales:
  1. unitaires locaux ($U_A \otimes I_B$, $I_A \otimes U_B$ ou encore $U_A \otimes U_B$);
  2. mesures locales (observables $X_A \otimes I_B$, $I_A \otimes X_B$ ou $X_A \otimes X_B$).

Question

Sous quelles conditions peut-on LOCC-transformer $|\phi\rangle_{AB}$ en $|\psi\rangle_{AB}$?

Décomposition de Schmidt

Proposition

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un état pur. Alors il existe deux familles d'états orthogonaux $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ de $\mathcal{H}_A$, respectivement $\mathcal{H}_B$, et un vecteur de probabilités $\{\lambda_i\}$ tels que

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle.$$

Le vecteur $\lambda_\phi = (\lambda_1, \ldots \lambda_d)$ de l'écriture précédente est unique; c'est le vecteur des coefficients de Schmidt de l'état biparti $|\phi\rangle_{AB}$.

- États séparables: $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$. La décomposition de Schmidt est donnée par l'équation précédente et on a $\lambda_\phi = (1, 0, \ldots, 0)$.
- États maximalement intriqués: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ (ici $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^d$). Le vecteur des coefficients de Schmidt est $\lambda_\psi = (1/d, 1/d, \ldots, 1/d)$.

Décomposition de Schmidt

Proposition

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ *un état pur. Alors il existe deux familles d'états orthogonaux* $\{a_i\}$ *et* $\{b_i\}$ *de* $\mathcal{H}_A$*, respectivement* $\mathcal{H}_B$*, et un vecteur de probabilités* $\{\lambda_i\}$ *tels que*

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle.$$

Le vecteur $\lambda_\phi = (\lambda_1, \ldots \lambda_d)$ *de l'écriture précédente est unique; c'est le vecteur des coefficients de Schmidt de l'état biparti* $|\phi\rangle_{AB}$*.*

- États séparables: $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$. La décomposition de Schmidt est donnée par l'équation précédente et on a $\lambda_\phi = (1, 0, \ldots, 0)$.
- États maximalement intriqués: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ (ici $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^d$). Le vecteur des coefficients de Schmidt est $\lambda_\psi = (1/d, 1/d, \ldots, 1/d)$.

Décomposition de Schmidt

Proposition

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ *un état pur. Alors il existe deux familles d'états orthogonaux* $\{a_i\}$ *et* $\{b_i\}$ *de* $\mathcal{H}_A$*, respectivement* $\mathcal{H}_B$*, et un vecteur de probabilités* $\{\lambda_i\}$ *tels que*

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle.$$

Le vecteur $\lambda_\phi = (\lambda_1, \ldots \lambda_d)$ *de l'écriture précédente est unique; c'est le vecteur des coefficients de Schmidt de l'état biparti* $|\phi\rangle_{AB}$*.*

- États séparables: $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$. La décomposition de Schmidt est donnée par l'équation précédente et on a $\lambda_\phi = (1, 0, \ldots, 0)$.
- États maximalement intriqués: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ (ici $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^d$). Le vecteur des coefficients de Schmidt est $\lambda_\psi = (1/d, 1/d, \ldots, 1/d)$.

Transformations LOCC - exemples

1. Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

Transformations LOCC - exemples

1. Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

Transformations LOCC - exemples

1. Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

Transformations LOCC - exemples

1. Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

Transformations LOCC - exemples

1. Soit $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ un état de départ séparable.

Fait

Les transformations LOCC ne peuvent pas augmenter le paramètre d qui apparait dans la décompositions de Schmidt (appelé rang de Schmidt)

Donc, à partir d'un état $|\phi\rangle$ séparable on ne peut obtenir que des états $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$ séparables:

$$|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\phi\rangle,$$

où U_A est un unitaire local de Alice tel que $U_A|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ et U_B est un unitaire local de Bob tel que $U_B|\beta\rangle = |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état séparable on ne peut obtenir que des états séparables.

Transformations LOCC - exemples

2. Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d}|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent proéder de la façon suivante:
   - Alice mesure son système dans la base $\{\alpha_i\}_{i=1}^{d}$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \ldots, d$. Supposons qu'elle trouve j. L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
   - Alice communique le résultat j de sa mesure à Bob.
   - Alice et Bob appliquent, chacun de son coté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
   - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

Transformations LOCC - exemples

2. Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d}|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent proéder de la façon suivante:
   - Alice mesure son système dans la base $\{\alpha_i\}_{i=1}^{d}$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \ldots, d$. Supposons qu'elle trouve j. L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
   - Alice communique le résultat j de sa mesure à Bob.
   - Alice et Bob appliquent, chacun de son coté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
   - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

Transformations LOCC - exemples

2. Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d}|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent proéder de la façon suivante:
   - Alice mesure son système dans la base $\{\alpha_i\}_{i=1}^{d}$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \ldots, d$. Supposons qu'elle trouve j. L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
   - Alice communique le résultat j de sa mesure à Bob.
   - Alice et Bob appliquent, chacun de son coté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
   - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

Transformations LOCC - exemples

2. Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent proéder de la façon suivante:
   - Alice mesure son système dans la base $\{\alpha_i\}_{i=1}^{d}$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \ldots, d$. Supposons qu'elle trouve j. L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
   - Alice communique le résultat j de sa mesure à Bob.
   - Alice et Bob appliquent, chacun de son coté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
   - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

Transformations LOCC - exemples

2. Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d}|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent proéder de la façon suivante:
   - Alice mesure son système dans la base $\{\alpha_i\}_{i=1}^{d}$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \ldots, d$. Supposons qu'elle trouve j. L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
   - Alice communique le résultat j de sa mesure à Bob.
   - Alice et Bob appliquent, chacun de son coté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
   - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

Transformations LOCC - exemples

2. Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent proéder de la façon suivante:
   - Alice mesure son système dans la base $\{\alpha_i\}_{i=1}^{d}$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \ldots, d$. Supposons qu'elle trouve j. L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
   - Alice communique le résultat j de sa mesure à Bob.
   - Alice et Bob appliquent, chacun de son coté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
   - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

Transformations LOCC - exemples

2. Soit $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{1/d} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ un état maximalement intriqué. Supposons qu'on veut obtenir un état final séparable $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$. Alice et Bob doivent proéder de la façon suivante:
   - Alice mesure son système dans la base $\{\alpha_i\}_{i=1}^{d}$. Elle a une probabilité de $1/d$ de trouver n'importe quel résultat $1, \ldots, d$. Supposons qu'elle trouve j. L'état du système devient $|\phi'\rangle = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle$.
   - Alice communique le résultat j de sa mesure à Bob.
   - Alice et Bob appliquent, chacun de son coté, les unitaires $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sur leur systèmes. $U_A(j)$ et $U_B(j)$ sont tels que $U_A(j)|\alpha_j\rangle = |\alpha'\rangle$ et $U_B(j)|\beta_j\rangle = |\beta'\rangle$.
   - Ils se retrouvent avec l'état biparti voulu $|\psi\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$.

Conclusion

A partir d'un état maximalement intriqué on peut obtenir n'importe quel état séparable.

Théorème de Nielsen

Théorème (Nielsen '98)

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ *un état pur et* λ_ϕ *son vecteur des coefficients de Schmidt. On définit* $|\psi\rangle$ *et* λ_ψ *de la même façon. Alors l'état* $|\phi\rangle$ *peut être transformé en l'état* $|\psi\rangle$ *par LOCC si et seulement si*

$$\lambda_\phi \prec \lambda_\psi.$$

"$\prec$" est la relation de domination (majorization).

- Les vecteurs λ_ϕ et λ_ψ sont de taille au plus $\min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$. Si l'un est plus petit que l'autre, on le complète en rajoutant des zéros.
- On note $P_d = \{x \in \mathbf{R}^d | x_i \geqslant 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$ l'ensemble convexe des vecteurs de probabilité de taille d.

Théorème de Nielsen

Théorème (Nielsen '98)

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un état pur et λ_ϕ son vecteur des coefficients de Schmidt. On définit $|\psi\rangle$ et λ_ψ de la même façon. Alors l'état $|\phi\rangle$ peut être transformé en l'état $|\psi\rangle$ par LOCC si et seulement si

$$\lambda_\phi \prec \lambda_\psi.$$

"$\prec$" est la relation de domination (majorization).

- Les vecteurs λ_ϕ et λ_ψ sont de taille au plus $\min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$. Si l'un est plus petit que l'autre, on le complète en rajoutant des zéros.
- On note $P_d = \{x \in \mathbf{R}^d | x_i \geqslant 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$ l'ensemble convexe des vecteurs de probabilité de taille d.

Théorème de Nielsen

Théorème (Nielsen '98)

Soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ *un état pur et* λ_ϕ *son vecteur des coefficients de Schmidt. On définit* $|\psi\rangle$ *et* λ_ψ *de la même façon. Alors l'état* $|\phi\rangle$ *peut être transformé en l'état* $|\psi\rangle$ *par LOCC si et seulement si*

$$\lambda_\phi \prec \lambda_\psi.$$

"$\prec$*" est la relation de domination (majorization).*

- Les vecteurs λ_ϕ et λ_ψ sont de taille au plus $\min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$. Si l'un est plus petit que l'autre, on le complète en rajoutant des zéros.
- On note $P_d = \{x \in \mathbf{R}^d | x_i \geqslant 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$ l'ensemble convexe des vecteurs de probabilité de taille d.

Relation de domination

Définition

Soient $x, y \in P_d$ *deux vecteurs de probabilités. On note* $x^\downarrow$ $(y^\downarrow)$ *le vecteur obtenu en ordonnant les composantes de* x (y) *de façon décroissante. On dit que* *x est dominé par y* *et on écrit* $x \prec y$ *si les (in)égalités suivantes sont satisfaites:*

$$
\begin{gathered}
x_1^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow \\
x_1^\downarrow + x_2^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow + y_2^\downarrow \\
\cdots \\
x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \ldots + x_{d-1}^\downarrow \leqslant y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \ldots + y_{d-1}^\downarrow \\
x_1^\downarrow + x_2^\downarrow + \ldots + x_d^\downarrow = y_1^\downarrow + y_2^\downarrow + \ldots + y_d^\downarrow
\end{gathered}
$$

Relation de domination - suite

- La relation "$\prec$" est un ordre partiel sur P_d. Les éléments minimum est maximum sont $(1/d, 1/d, \ldots, 1/d)$ et respectivement $(1, 0, \ldots, 0)$.
- C'est une relation qui a été beaucoup étudiée en algèbre linéaire [Marshall et Olkin '79, Bhatia '97].

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $x \prec y$,
2. $\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i - t| \leqslant \sum_{i=1}^{d} |y_i - t|$,
3. *Il existe une matrice bistochastique B telle que $x = By$.*

Relation de domination - suite

- La relation "$\prec$" est un ordre partiel sur P_d. Les éléments minimum est maximum sont $(1/d, 1/d, \ldots, 1/d)$ et respectivement $(1, 0, \ldots, 0)$.
- C'est une relation qui a été beaucoup étudiée en algèbre linéaire [Marshall et Olkin '79, Bhatia '97].

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $x \prec y$,
2. $\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i - t| \leqslant \sum_{i=1}^{d} |y_i - t|$,
3. *Il existe une matrice bistochastique B telle que $x = By$.*

Relation de domination - suite

- La relation "$\prec$" est un ordre partiel sur P_d. Les éléments minimum est maximum sont $(1/d, 1/d, \ldots, 1/d)$ et respectivement $(1, 0, \ldots, 0)$.
- C'est une relation qui a été beaucoup étudiée en algèbre linéaire [Marshall et Olkin '79, Bhatia '97].

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $x \prec y$,
2. $\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i - t| \leqslant \sum_{i=1}^{d} |y_i - t|$,
3. *Il existe une matrice bistochastique B telle que $x = By$.*

Relation de domination - suite

- Notation: pour $y \in P_d$, on pose $S_d(y) = \{x \in P_d | x \prec y\}$. C'est l'ensemble de vecteurs dominés par y.
- En termes de transformations LOCC, $S_d(\lambda_\psi)$ est l'ensemble des vecteurs de Schmidt correspondant aux états à partir desquels on peut obtenir $|\psi\rangle$.
- $S_d(y)$ est un ensemble convexe fermé. Ses points extrémaux sont y et ses permutés.

Conclusion

La relation de domination "$\prec$" est parfaitement comprise. Sa structure mathématique est connue.

Relation de domination - suite

- Notation: pour $y \in P_d$, on pose $S_d(y) = \{x \in P_d | x \prec y\}$. C'est l'ensemble de vecteurs dominés par y.
- En termes de transformations LOCC, $S_d(\lambda_\psi)$ est l'ensemble des vecteurs de Schmidt correspondant aux états à partir desquels on peut obtenir $|\psi\rangle$.
- $S_d(y)$ est un ensemble convexe fermé. Ses points extrémaux sont y et ses permutés.

Conclusion

La relation de domination "$\prec$" est parfaitement comprise. Sa structure mathématique est connue.

Relation de domination - suite

- Notation: pour $y \in P_d$, on pose $S_d(y) = \{x \in P_d | x \prec y\}$. C'est l'ensemble de vecteurs dominés par y.
- En termes de transformations LOCC, $S_d(\lambda_\psi)$ est l'ensemble des vecteurs de Schmidt correspondant aux états à partir desquels on peut obtenir $|\psi\rangle$.
- $S_d(y)$ est un ensemble convexe fermé. Ses points extrémaux sont y et ses permutés.

Conclusion

La relation de domination "$\prec$" est parfaitement comprise. Sa structure mathématique est connue.

Relation de domination - suite

- Notation: pour $y \in P_d$, on pose $S_d(y) = \{x \in P_d | x \prec y\}$. C'est l'ensemble de vecteurs dominés par y.
- En termes de transformations LOCC, $S_d(\lambda_\psi)$ est l'ensemble des vecteurs de Schmidt correspondant aux états à partir desquels on peut obtenir $|\psi\rangle$.
- $S_d(y)$ est un ensemble convexe fermé. Ses points extrémaux sont y et ses permutés.

Conclusion

La relation de domination "$\prec$" est parfaitement comprise. Sa structure mathématique est connue.

Transformations ELOCC

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

Transformations ELOCC

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

Transformations ELOCC

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

Transformations ELOCC

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

Transformations ELOCC

- Jonathan et Plenio [1998]: l'intrication peut aider les transformations LOCC, sans être consommée.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, à l'aide d'un état catalyseur $|\chi\rangle$, la transformation $|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ et $z \in P_k$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais on a $x \otimes z \prec y \otimes z$ (le produit tensoriel des états quantiques correspond pour les vecteurs de Schmidt au produit tensoriel usuel: $(x_i)_i \otimes (z_j)_j = (x_i z_j)_{ij}$).
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $z = (0.6, 0.4)$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est ELOCC-dominé par y s'il existe un vecteur $z \in P_k$ tel que $x \otimes z \prec y \otimes z$. On note $x \prec_T y$.

Transformations MLOCC

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

Transformations MLOCC

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

Transformations MLOCC

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant n copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

Transformations MLOCC

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant *n* copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

Transformations MLOCC

- Bandyopadhyay et al. [2002]: considérer des copies multiples des deux états peut aider les transformations LOCC.
- Il existe des états $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ tels que $|\phi\rangle$ ne peut pas être transformé en $|\psi\rangle$ par LOCC, mais, en considérant *n* copies des deux états, la transformation $|\phi\rangle^{\otimes n} \to |\psi\rangle^{\otimes n}$ devient possible.
- Mathématiquement: il existe des vecteurs $x, y \in P_d$ tels qu'on n'a pas $x \prec y$ mais, pour un $n \geqslant 2$, on a $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$.
- Exemple: $x = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1)$, $y = (0.5, 0.25, 0.25, 0)$ et $n = 3$.

Définition

Soient $x, y \in P_d$ deux vecteurs de probabilités. On dit que x est MLOCC-dominé par y s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}$. On note $x \prec_M y$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y:

$$T_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y, $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y:

$$T_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y, $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y:

$$T_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y, $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y:

$$T_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y, $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Deux relations plus compliquées...

- Comme pour la relation de domination usuelle, on introduit les ensembles des vecteurs ELOCC/MLOCC-dominés par un vecteur donné y:

$$T_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_k \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_d(y) = \{x \in P_d | x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\}.$$

- Pour tout y, $S_d(y) \subseteq M_d(y) \subseteq T_d(y)$.
- En général, $M_d(y)$ et $T_d(y)$ ne sont ni ouverts, ni fermés.
- $T_d(y)$ est un ensemble convexe borné.

Question

Donner des caractérisations tractables des ensembles $M_d(y)$ et $T_d(y)$.

Un problème ouvert

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ un vecteur de probabilités. Alors $x \in P_d$ appartient à $\overline{T_d(y)}$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

1. *Pour $p \geqslant 1$, $\|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;*
2. *Pour $0 \leqslant p \leqslant 1$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;*
3. *Pour $p \leqslant 0$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.*

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$, avec $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Dans $\overline{T_d(y)}$, la fermeture est prise dans la topologie usuelle de P_d.
- Le sens "$x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence facile de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbf{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.

Un problème ouvert

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ un vecteur de probabilités. Alors $x \in P_d$ appartient à $\overline{T_d(y)}$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

1. *Pour $p \geqslant 1$, $\|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;*
2. *Pour $0 \leqslant p \leqslant 1$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;*
3. *Pour $p \leqslant 0$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.*

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^p\right)^{1/p}$, avec $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Dans $\overline{T_d(y)}$, la fermeture est prise dans la topologie usuelle de P_d.
- Le sens "$x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence facile de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbf{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.

Un problème ouvert

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ un vecteur de probabilités. Alors $x \in P_d$ appartient à $\overline{T_d(y)}$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

1. *Pour $p \geqslant 1$, $\|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;*
2. *Pour $0 \leqslant p \leqslant 1$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;*
3. *Pour $p \leqslant 0$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.*

Les "normes" ℓ_p sont définies par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$, avec $\|x\|_0 = \#\{x_i > 0\}$.

- Dans $\overline{T_d(y)}$, la fermeture est prise dans la topologie usuelle de P_d.
- Le sens "$x \in \overline{T_d(y)} \Rightarrow$ inégalités" est une conséquence facile de la convexité/concavité des fonctions $t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbf{R}$ et du fait que les normes ℓ_p sont multiplicatives.

Le résultat

Guillaume AUBRUN et I.N. - “Catalytic majorization and ℓ_p norms”, à paraitre dans Comm. in Math. Physics, `arXiv:quant-ph/0702153v1`.

Une observation importante

- On considère deux vecteurs $x, y \in P_d$. Pour décider si $x \prec / \prec_M / \prec_T y$, il ne faut connaitre que les composantes strictement positives de x et de y.
- Il est possible donc de comparer deux vecteurs x et y de tailles différentes en rajoutant des composantes nulles à la fin du plus petit.
- Il semble donc naturel (au moins d'un point de vue mathématique) de considérer les ensembles suivants:

$$T_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} | x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_{<\infty} \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} | x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\},$$

où $P_{<\infty} = \bigcup_{d \geqslant 1} P_d$ est l'ensemble de vecteurs de probabilités de support fini.

Une observation importante

- On considère deux vecteurs $x, y \in P_d$. Pour décider si $x \prec / \prec_M / \prec_T y$, il ne faut connaitre que les composantes strictement positives de x et de y.
- Il est possible donc de comparer deux vecteurs x et y de tailles différentes en rajoutant des composantes nulles à la fin du plus petit.
- Il semble donc naturel (au moins d'un point de vue mathématique) de considérer les ensembles suivants:

$$T_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} | x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_{<\infty} \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} | x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\},$$

où $P_{<\infty} = \bigcup_{d \geqslant 1} P_d$ est l'ensemble de vecteurs de probabilités de support fini.

Une observation importante

- On considère deux vecteurs $x, y \in P_d$. Pour décider si $x \prec / \prec_M / \prec_T y$, il ne faut connaitre que les composantes strictement positives de x et de y.
- Il est possible donc de comparer deux vecteurs x et y de tailles différentes en rajoutant des composantes nulles à la fin du plus petit.
- Il semble donc naturel (au moins d'un point de vue mathématique) de considérer les ensembles suivants:

$$T_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} | x \prec_T y \Leftrightarrow \exists z \in P_{<\infty} \text{ t.q. } x \otimes z \prec y \otimes z\},$$
$$M_{<\infty}(y) = \{x \in P_{<\infty} | x \prec_M y \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 \text{ t.q. } x^{\otimes n} \prec y^{\otimes n}\},$$

où $P_{<\infty} = \bigcup_{d \geqslant 1} P_d$ est l'ensemble de vecteurs de probabilités de support fini.

Une observation importante - suite

- Pour $y \in P_d$, on a les égalités suivantes: $T_d(y) = T_{<\infty}(y) \cap P_d$ et $M_d(y) = M_{<\infty}(y) \cap P_d$.
- Par conséquence, pour des vecteurs y qui ne sont pas trop simples, les ensembles $T_{<\infty}(y)$ et $M_{<\infty}(y)$ ne sont pas fermés.
- On note par $\overline{T_{<\infty}(y)}$ et $\overline{M_{<\infty}(y)}$ la fermeture par rapport à la norme ℓ_1, qui est la topologie la plus naturelle dans ce cadre.
- Pour tout d, on a les inclusions strictes suivantes:

$$\overline{T_d(y)} \subsetneq \overline{T_{<\infty}(y)} \cap P_d,$$
$$\overline{M_d(y)} \subsetneq \overline{M_{<\infty}(y)} \cap P_d.$$

Une observation importante - suite

- Pour $y \in P_d$, on a les égalités suivantes: $T_d(y) = T_{<\infty}(y) \cap P_d$ et $M_d(y) = M_{<\infty}(y) \cap P_d$.
- Par conséquence, pour des vecteurs y qui ne sont pas trop simples, les ensembles $T_{<\infty}(y)$ et $M_{<\infty}(y)$ ne sont pas fermés.
- On note par $\overline{T_{<\infty}(y)}$ et $\overline{M_{<\infty}(y)}$ la fermeture par rapport à la norme ℓ_1, qui est la topologie la plus naturelle dans ce cadre.
- Pour tout d, on a les inclusions strictes suivantes:

$$\overline{T_d(y)} \subsetneq \overline{T_{<\infty}(y)} \cap P_d,$$
$$\overline{M_d(y)} \subsetneq \overline{M_{<\infty}(y)} \cap P_d.$$

Une observation importante - suite

- Pour $y \in P_d$, on a les égalités suivantes: $T_d(y) = T_{<\infty}(y) \cap P_d$ et $M_d(y) = M_{<\infty}(y) \cap P_d$.
- Par conséquence, pour des vecteurs y qui ne sont pas trop simples, les ensembles $T_{<\infty}(y)$ et $M_{<\infty}(y)$ ne sont pas fermés.
- On note par $\overline{T_{<\infty}(y)}$ et $\overline{M_{<\infty}(y)}$ la fermeture par rapport à la norme ℓ_1, qui est la topologie la plus naturelle dans ce cadre.
- Pour tout d, on a les inclusions strictes suivantes:

$$\overline{T_d(y)} \subsetneq \overline{T_{<\infty}(y)} \cap P_d,$$
$$\overline{M_d(y)} \subsetneq \overline{M_{<\infty}(y)} \cap P_d.$$

Une observation importante - suite

- Pour $y \in P_d$, on a les égalités suivantes: $T_d(y) = T_{<\infty}(y) \cap P_d$ et $M_d(y) = M_{<\infty}(y) \cap P_d$.
- Par conséquence, pour des vecteurs y qui ne sont pas trop simples, les ensembles $T_{<\infty}(y)$ et $M_{<\infty}(y)$ ne sont pas fermés.
- On note par $\overline{T_{<\infty}(y)}$ et $\overline{M_{<\infty}(y)}$ la fermeture par rapport à la norme ℓ_1, qui est la topologie la plus naturelle dans ce cadre.
- Pour tout d, on a les inclusions strictes suivantes:

$$\overline{T_d(y)} \subsetneq \overline{T_{<\infty}(y)} \cap P_d,$$
$$\overline{M_d(y)} \subsetneq \overline{M_{<\infty}(y)} \cap P_d.$$

Le théorème principal

Théorème

Soient $x, y \in P_{<\infty}$ *deux vecteurs de probabilités. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $x \in \overline{M_{<\infty}(y)}$,
2. $x \in \overline{T_{<\infty}(y)}$,
3. $\forall p \geqslant 1,\ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$.

Rappel:

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ *un vecteur de probabilités. Alors* $x \in P_d$ *appartient à* $\overline{T_d(y)}$ *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *Pour* $p \geqslant 1$, $\|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;
2. *Pour* $0 \leqslant p \leqslant 1$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;
3. *Pour* $p \leqslant 0$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.

Le théorème principal

Théorème

Soient $x, y \in P_{<\infty}$ *deux vecteurs de probabilités. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $x \in \overline{M_{<\infty}(y)}$,
2. $x \in \overline{T_{<\infty}(y)}$,
3. $\forall p \geqslant 1,\ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$.

Rappel:

Conjecture (Nielsen)

Soit $y \in P_d$ *un vecteur de probabilités. Alors* $x \in P_d$ *appartient à* $\overline{T_d(y)}$ *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *Pour* $p \geqslant 1$, $\|x\|_p \leqslant \|y\|_p$;
2. *Pour* $0 \leqslant p \leqslant 1$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$;
3. *Pour* $p \leqslant 0$, $\|x\|_p \geqslant \|y\|_p$.

Remarques et conséquences

Théorème

$$\overline{M_{<\infty}(y)} = \overline{T_{<\infty}(y)} = \{x \in P_{<\infty} | \forall p \geqslant 1, \ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p\}.$$

- Les inégalités sur les normes ℓ_p peuvent être traduites en termes d'entropies de Rényi:

$$H_p(x) = \frac{\operatorname{sgn}(p)}{p-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^p \right).$$

- Soit $T'(y)$ l'ensemble des vecteurs ELOCC-dominés par y où on permet des catalyseurs de taille infinie. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)} = \overline{T'(y)}$.
- La partie la plus difficile du théorème est l'implication (3) $\Rightarrow$ (1 ou 2). On construit explicitement des suites approximantes $x_n \to x$, avec $x_n \in T_{<\infty}$ et $x \in \overline{T_{<\infty}}$. Souvent, la taille des supports des vecteurs x_n converge vers l'infini.

Remarques et conséquences

Théorème

$$\overline{M_{<\infty}(y)} = \overline{T_{<\infty}(y)} = \{x \in P_{<\infty} | \forall p \geqslant 1, \|x\|_p \leqslant \|y\|_p\}.$$

- Les inégalités sur les normes ℓ_p peuvent être traduites en termes d'entropies de Rényi:

$$H_p(x) = \frac{\mathrm{sgn}(p)}{p-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^p \right).$$

- Soit $T'(y)$ l'ensemble des vecteurs ELOCC-dominés par y où on permet des catalyseurs de taille infinie. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)} = \overline{T'(y)}$.
- La partie la plus difficile du théorème est l'implication (3) $\Rightarrow$ (1 ou 2). On construit explicitement des suites approximantes $x_n \to x$, avec $x_n \in T_{<\infty}$ et $x \in \overline{T_{<\infty}}$. Souvent, la taille des supports des vecteurs x_n converge vers l'infini.

Remarques et conséquences

Théorème

$$\overline{M_{<\infty}(y)} = \overline{T_{<\infty}(y)} = \{x \in P_{<\infty} | \forall p \geqslant 1,\ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p\}.$$

- Les inégalités sur les normes ℓ_p peuvent être traduites en termes d'entropies de Rényi:

$$H_p(x) = \frac{\operatorname{sgn}(p)}{p-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^p \right).$$

- Soit $T'(y)$ l'ensemble des vecteurs ELOCC-dominés par y où on permet des catalyseurs de taille infinie. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)} = \overline{T'(y)}$.
- La partie la plus difficile du théorème est l'implication (3) $\Rightarrow$ (1 ou 2). On construit explicitement des suites approximantes $x_n \rightarrow x$, avec $x_n \in T_{<\infty}$ et $x \in \overline{T_{<\infty}}$. Souvent, la taille des supports des vecteurs x_n converge vers l'infini.

Remarques et conséquences

Théorème

$$\overline{M_{<\infty}(y)} = \overline{T_{<\infty}(y)} = \{x \in P_{<\infty} | \forall p \geqslant 1, \ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p\}.$$

- Les inégalités sur les normes ℓ_p peuvent être traduites en termes d'entropies de Rényi:

$$H_p(x) = \frac{\operatorname{sgn}(p)}{p-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^p \right).$$

- Soit $T'(y)$ l'ensemble des vecteurs ELOCC-dominés par y où on permet des catalyseurs de taille infinie. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)} = \overline{T'(y)}$.
- La partie la plus difficile du théorème est l'implication (3) $\Rightarrow$ (1 ou 2). On construit explicitement des suites approximantes $x_n \to x$, avec $x_n \in T_{<\infty}$ et $x \in \overline{T_{<\infty}}$. Souvent, la taille des supports des vecteurs x_n converge vers l'infini.

Perspectives

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité. Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients $\Rightarrow$ la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x, avec une borne uniforme sur les supports des x_n. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) ($p \geqslant 0$) dans la conjecture de Nielsen.

Perspectives

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité.Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients $\Rightarrow$ la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x, avec une borne uniforme sur les supports des x_n. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) ($p \geqslant 0$) dans la conjecture de Nielsen.

Perspectives

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité.Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients $\Rightarrow$ la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x, avec une borne uniforme sur les supports des x_n. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) ($p \geqslant 0$) dans la conjecture de Nielsen.

Perspectives

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité.Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients $\Rightarrow$ la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x, avec une borne uniforme sur les supports des x_n. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) $(p \geqslant 0)$ dans la conjecture de Nielsen.

Perspectives

- Utiliser les mêmes techniques pour prouver la conjecture de Nielsen dans son intégralité.Principal obstacle: on a besoin de travailler avec des vecteurs déficients $\Rightarrow$ la taille des vecteurs approximants explose.
- Ne permettre que des vecteurs approximants de taille bornée:

Conjecture

Pour $y \in P_d$, soit $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ l'ensemble des vecteurs $x \in P_d$ tels qu'il existe une suite (x_n) de $T_{<\infty}(y)$ qui converge vers x, avec une borne uniforme sur les supports des x_n. Alors $\overline{T_{<\infty}(y)}^b$ est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient les conditions (1) et (2) ($p \geqslant 0$) dans la conjecture de Nielsen.

Éléments de preuve

L'outil probabiliste - domination et queues des v.a.

- A tout vecteur à composantes positives $x = (x_1, \dots, x_d)$ on associe la mesure $\mu_x = \sum_{i=1}^{d} x_i \delta_{\log x_i}$, où δ est la masse de Dirac et $0\delta_{\log 0} = 0$.
- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.
- On étend la relation de domination aux vecteurs de $\mathbf{R}^d$ avec des composantes positives qu'on note "$\prec_w$" (de la définition de $\prec$, on garde juste les $d-1$ inégalités).

Proposition

Soient x et y des vecteurs de $\mathbf{R}^d$ avec des composantes positives et μ_x et μ_y les mesures associées à x et à y. Si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mu_x[t, \infty) \leqslant \mu_y[t, \infty)$, alors $x \prec_w y$.

L'outil probabiliste - domination et queues des v.a.

- A tout vecteur à composantes positives $x = (x_1, \ldots, x_d)$ on associe la mesure $\mu_x = \sum_{i=1}^{d} x_i \delta_{\log x_i}$, où δ est la masse de Dirac et $0\delta_{\log 0} = 0$.
- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.
- On étend la relation de domination aux vecteurs de $\mathbf{R}^d$ avec des composantes positives qu'on note "$\prec_w$" (de la définition de $\prec$, on garde juste les $d-1$ inégalités).

Proposition

Soient x et y des vecteurs de $\mathbf{R}^d$ avec des composantes positives et μ_x et μ_y les mesures associées à x et à y. Si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mu_x[t, \infty) \leqslant \mu_y[t, \infty)$, alors $x \prec_w y$.

L'outil probabiliste - domination et queues des v.a.

- A tout vecteur à composantes positives $x = (x_1, \ldots, x_d)$ on associe la mesure $\mu_x = \sum_{i=1}^{d} x_i \delta_{\log x_i}$, où δ est la masse de Dirac et $0\delta_{\log 0} = 0$.
- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.
- On étend la relation de domination aux vecteurs de $\mathbf{R}^d$ avec des composantes positives qu'on note "$\prec_w$" (de la définition de $\prec$, on garde juste les $d-1$ inégalités).

Proposition

Soient x et y des vecteurs de $\mathbf{R}^d$ avec des composantes positives et μ_x et μ_y les mesures associées à x et à y. Si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mu_x[t, \infty) \leqslant \mu_y[t, \infty)$, alors $x \prec_w y$.

L'outil probabiliste - domination et queues des v.a.

- A tout vecteur à composantes positives $x = (x_1, \ldots, x_d)$ on associe la mesure $\mu_x = \sum_{i=1}^d x_i \delta_{\log x_i}$, où δ est la masse de Dirac et $0\delta_{\log 0} = 0$.
- Le produit tensoriel des vecteurs correspond à la convolution des mesures: $\mu_{x \otimes y} = \mu_x * \mu_y$.
- On étend la relation de domination aux vecteurs de $\mathbf{R}^d$ avec des composantes positives qu'on note "$\prec_w$" (de la définition de $\prec$, on garde juste les $d-1$ inégalités).

Proposition

Soient x et y des vecteurs de $\mathbf{R}^d$ avec des composantes positives et μ_x et μ_y les mesures associées à x et à y. Si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mu_x[t, \infty) \leqslant \mu_y[t, \infty)$, alors $x \prec_w y$.

Le théorème des grandes déviations

- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-\infty, \infty[$. On définit sa transformée de log-Laplace par

$$\Lambda_X(\lambda) = \log \mathbf{E} e^{\lambda X}.$$

- La conjuguée convexe de Λ, appelée souvent transformée de Cramér, est définie par

$$\Lambda_X^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \lambda x - \Lambda_X(\lambda).$$

Théorème

Soit X une v.a. à valeurs dans $[-\infty, +\infty)$ telle que $\Lambda_X(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda \geqslant 0$. Soit (X_i) une suite de copies i.i.d. de X. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt) = \begin{cases} \log \mathbf{P}(X \neq -\infty) \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ -\Lambda_X^*(t) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le théorème des grandes déviations

- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-\infty, \infty[$. On définit sa transformée de log-Laplace par
$$\Lambda_X(\lambda) = \log \mathbf{E} e^{\lambda X}.$$

- La conjuguée convexe de Λ, appelée souvent transformée de Cramér, est définie par
$$\Lambda_X^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \lambda x - \Lambda_X(\lambda).$$

Théorème

Soit X une v.a. à valeurs dans $[-\infty, +\infty)$ telle que $\Lambda_X(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda \geqslant 0$. Soit (X_i) une suite de copies i.i.d. de X. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt) = \begin{cases} \log \mathbf{P}(X \neq -\infty) \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ -\Lambda_X^*(t) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le théorème des grandes déviations

- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-\infty, \infty[$. On définit sa transformée de log-Laplace par

$$\Lambda_X(\lambda) = \log \mathbf{E} e^{\lambda X}.$$

- La conjuguée convexe de Λ, appelée souvent transformée de Cramér, est définie par

$$\Lambda_X^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \lambda x - \Lambda_X(\lambda).$$

Théorème

Soit X une v.a. à valeurs dans $[-\infty, +\infty)$ telle que $\Lambda_X(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda \geqslant 0$. Soit (X_i) une suite de copies i.i.d. de X. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt) = \begin{cases} \log \mathbf{P}(X \neq -\infty) \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ -\Lambda_X^*(t) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le lemme clé

Lemme

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

Esquisse de preuve

- S.p.d.g., on peut supposer $1 - p = \|x\|_1 < \|y\|_1 = 1$. On considère les mesures μ_x et μ_y associées à x et à y.
- On pose $\overline{\mu}_x = \mu_x + p\delta_{-\infty}$; c'est une mesure de probabilités.
- D'après la proposition liant les queues des v.a. à la relation de domination, il suffit de trouver n tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt) \leqslant \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geqslant nt),$$

où X_i (resp. Y_i) sont des v.a.i.i.d. de loi $\overline{\mu}_x$ (resp. μ_y).

Le lemme clé

Lemme

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

Esquisse de preuve

- S.p.d.g., on peut supposer $1 - p = \|x\|_1 < \|y\|_1 = 1$. On considère les mesures μ_x et μ_y associées à x et à y.
- On pose $\overline{\mu}_x = \mu_x + p\delta_{-\infty}$; c'est une mesure de probabilités.
- D'après la proposition liant les queues des v.a. à la relation de domination, il suffit de trouver n tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt) \leqslant \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geqslant nt),$$

où X_i (resp. Y_i) sont des v.a.i.i.d. de loi $\overline{\mu}_x$ (resp. μ_y).

Le lemme clé

Lemme

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

Esquisse de preuve

- S.p.d.g., on peut supposer $1 - p = \|x\|_1 < \|y\|_1 = 1$. On considère les mesures μ_x et μ_y associées à x et à y.
- On pose $\overline{\mu}_x = \mu_x + p\delta_{-\infty}$; c'est une mesure de probabilités.
- D'après la proposition liant les queues des v.a. à la relation de domination, il suffit de trouver n tel que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt) \leqslant \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geqslant nt),$$

où X_i (resp. Y_i) sont des v.a.i.i.d. de loi $\overline{\mu}_x$ (resp. μ_y).

Le lemme clé

Lemme

Soient $x, y \in R^d$ *deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *l'inégalité stricte* $\|x\|_p < \|y\|_p$ *est satisfaite, alors il existe un entier* n *tel que* $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

Esquisse de preuve

- S.p.d.g., on peut supposer $1 - p = \|x\|_1 < \|y\|_1 = 1$. On considère les mesures μ_x et μ_y associées à x et à y.
- On pose $\overline{\mu}_x = \mu_x + p\delta_{-\infty}$; c'est une mesure de probabilités.
- D'après la proposition liant les queues des v.a. à la relation de domination, il suffit de trouver n tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt) \leqslant \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geqslant nt),$$

où X_i (resp. Y_i) sont des v.a.i.i.d. de loi $\overline{\mu}_x$ (resp. μ_y).

Le lemme clé - suite de la preuve

- Soient $f_n(t) = \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt)^{1/n}$ et $g_n(t) = \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geqslant nt)^{1/n}$. D'après le théorème des grandes déviations, on a

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 - p \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(X|X \neq -\infty) \\ e^{-\Lambda_X^*(t)} \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(Y) \\ e^{-\Lambda_Y^*(t)} \text{ sinon.} \end{cases}$$

- Mais $\forall \lambda \geqslant 0, \Lambda_X(\lambda) = \log \|x\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$ et $\Lambda_Y(\lambda) = \log \|y\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$.
- Le supremum dans la définition de $\Lambda_Y^*(t)$ est atteint, pour $\mathbf{E}Y \leqslant t \leqslant \text{esssup}\, Y$, en un point $\lambda \geqslant 0$.
- On conclut en utilisant un résultat de convergence uniforme.

Le lemme clé - suite de la preuve

- Soient $f_n(t) = \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt)^{1/n}$ et $g_n(t) = \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geqslant nt)^{1/n}$. D'après le théorème des grandes déviations, on a

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 - p \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ e^{-\Lambda_X^*(t)} \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(Y) \\ e^{-\Lambda_Y^*(t)} \text{ sinon.} \end{cases}$$

- Mais $\forall \lambda \geqslant 0, \Lambda_X(\lambda) = \log \|x\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$ et $\Lambda_Y(\lambda) = \log \|y\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$.
- Le supremum dans la définition de $\Lambda_Y^*(t)$ est atteint, pour $\mathbf{E}Y \leqslant t \leqslant \text{esssup}\, Y$, en un point $\lambda \geqslant 0$.
- On conclut en utilisant un résultat de convergence uniforme.

Le lemme clé - suite de la preuve

- Soient $f_n(t) = \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt)^{1/n}$ et $g_n(t) = \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geqslant nt)^{1/n}$. D'après le théorème des grandes déviations, on a

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 - p \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(X | X \neq -\infty) \\ e^{-\Lambda_X^*(t)} \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(Y) \\ e^{-\Lambda_Y^*(t)} \text{ sinon.} \end{cases}$$

- Mais $\forall \lambda \geqslant 0, \Lambda_X(\lambda) = \log \|x\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$ et $\Lambda_Y(\lambda) = \log \|y\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$.
- Le supremum dans la définition de $\Lambda_Y^*(t)$ est atteint, pour $\mathbf{E}Y \leqslant t \leqslant \text{esssup}\, Y$, en un point $\lambda \geqslant 0$.
- On conclut en utilisant un résultat de convergence uniforme.

Le lemme clé - suite de la preuve

- Soient $f_n(t) = \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant nt)^{1/n}$ et $g_n(t) = \mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_n \geqslant nt)^{1/n}$. D'après le théorème des grandes déviations, on a

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 - p \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(X|X \neq -\infty) \\ e^{-\Lambda_X^*(t)} \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leqslant \mathbf{E}(Y) \\ e^{-\Lambda_Y^*(t)} \text{ sinon.} \end{cases}$$

- Mais $\forall \lambda \geqslant 0, \Lambda_X(\lambda) = \log \|x\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$ et $\Lambda_Y(\lambda) = \log \|y\|_{\lambda+1}^{\lambda+1}$.
- Le supremum dans la définition de $\Lambda_Y^*(t)$ est atteint, pour $\mathbf{E}Y \leqslant t \leqslant \operatorname{esssup} Y$, en un point $\lambda \geqslant 0$.
- On conclut en utilisant un résultat de convergence uniforme.

Combler les trous...

Lemme (clé)

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leqslant p < \infty, \ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la rélation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k peites composantes ε/k à la fin de x_ε. Inconvenient: k dépend de ε.

Combler les trous...

Lemme (clé)

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leqslant p < \infty, \ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la rélation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k peites composantes ε/k à la fin de x_ε. Inconvenient: k dépend de ε.

Combler les trous...

Lemme (clé)

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leqslant p < \infty, \; \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la rélation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k peites composantes ε/k à la fin de x_ε. Inconvenient: k dépend de ε.

Combler les trous...

Lemme (clé)

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leqslant p < \infty, \ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la rélation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k peites composantes ε/k à la fin de x_ε. Inconvenient: k dépend de ε.

Combler les trous...

Lemme (clé)

Soient $x, y \in R^d$ deux vecteurs à coordonnées positives. Si, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'inégalité stricte $\|x\|_p < \|y\|_p$ est satisfaite, alors il existe un entier n tel que $x^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$.

- Soient x, y des vecteurs de probabilité tels que $\forall 1 \leqslant p < \infty, \ \|x\|_p \leqslant \|y\|_p$ et soit $\varepsilon > 0$. On construit le vecteur x_ε en enlevant à x la masse ε (uniformement sur toutes les composantes).
- x_ε et y vérifient les hypothèses du lemme, donc il existe n tel que $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$. Il ne reste qu'à rajouter la masse ε à x_ε de façon que la rélation $x_\varepsilon^{\otimes n} \prec_w y^{\otimes n}$ reste vraie.
- Cela ne peut pas se faire en rajoutant tout en une seule fois; on risque de perturber les plus petites composantes de $x_\varepsilon^{\otimes n}$.
- L'idée c'est d'ajouter k peites composantes ε/k à la fin de x_ε. Inconvenient: k dépend de ε.

Fin

Questions ?