L2 Math 3 **Septembre 2007**

SUITES ET SERIES

Suites numériques

Exercice 1 Etudier les suites (u_n) dont le terme général est donné par :

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$
3. $u_n = \frac{2^n}{n^2}$
4. $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$
5. $u_n = n^2 \sin(\frac{1}{3^n})$
6. $u_n = \sqrt[n]{n+1}$
7. $u_n = (1-\frac{1}{n})^n$
8. $u_n = n\sin(\frac{2}{n})$
9. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a, b > 0$
10. $u_n = \frac{n^2}{e^n}$

Séries numériques

Exercice 2 Donner la nature des séries de terme général :

1. $u_n = q^n$
2. $u_n = \frac{1}{4^n \ln(2+\frac{1}{n})}$
3. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
4. $u_n = (a+\frac{1}{n})^n$
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n}$
6. $u_n = (1+\sqrt{n})^{-n}$
7. $u_n = \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n})$
8. $u_n = n^{\alpha+1}$
9. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
10. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$. Calculer S_{2n}, puis en déduire la somme de cette série.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries suivantes convergent-elles ? calculer leurs sommes lorsque $\alpha = 1$.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (n-1)}$
2. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-4)\alpha}$

Exercice 4 En exprimant $u_n = \dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ comme somme de deux suites, déterminer selon les valeurs de α la nature de la série $\displaystyle\sum_{n}^{\infty} u_n$.

Suites de fonctions

Exercice 5 On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{1+(1+nx)^2}$. Démontrer que cette suite converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b]$ ne contenant pas 0.

Exercice 6 On considère la suite d efonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x^2 e^{-nx}}{n^\alpha}$.
Etudier selon les valeurs de α la convergence simple de cette suite sur $\mathbb{R}$.
Sur quels intervalles y-a-t-il convergence uniforme ?