L2 Math 3 **Septembre 2007**

SERIES DE FONCTIONS

Exercice 1 Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ sur $[0,1]$,
2. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ sur $[0,1]$,
3. $f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{1+nx}$ sur $\mathbb{R}^+$,
4. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ sur $[0,\pi]$,
5. $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$,
6. $f_n(x) = (-1)^n x^n(1-x)$ sur $[0,1]$,
7. $f_n(x) = \sin(\frac{nx}{1+nx})$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique donnée sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x) = x$.

1. Représenter la fonction f sur $]-3\pi,3\pi]$ et calculer $f(4)$.
2. Déterminer la série de Fourier de la fonction f. On notera $Sf(x)$ la somme de cette série.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a t on $Sf(x) = f(x)$?
4. Déduire de la question précédente la valeur de la somme $\Sigma_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire donnée sur $[0,\pi]$ par $f(x) = 3x - 2\pi$.

1. Représenter la fonction f sur $[-3\pi,3\pi]$ et exprimer $f(x)$ pour $x \in [\pi,2\pi]$.
2. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la fonction f est elle dérivable ?
3. Déterminer la série de Fourier de la fonction f.
4. Calculer la somme $\Sigma_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.
5. (a) Montrer que la somme de la série de fonctions $\Sigma_{p=0}^{\infty} \frac{\sin^2((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $g(x)$ la somme de la série précédente. Exprimer $g(x)$ pour $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$

Exercice 4 Préciser le disque de convergence des séries entières à variable complexe suivantes :

1. $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$
2. $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{n}} z^n$
3. $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{2^n}$

Exercice 5 Préciser l'intervalle de convergence des séries entières à variable réelles suivantes, avec étude aux extrémités de l'intervalle :

1. $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$
2. $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n2^n}$