SERIES ENTIERES ET EDP

Séries entières

Exercice 1 Donner les développements en série entière des fonctions à variable réelle suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ 2. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ 3. $f(x) = \arcsin(x)$

Exercice 2 Exprimer la somme de chaque série entière sur son disque de convergence que l'on précisera :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ 3. $\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)z^{3n+2}$

Exercice 3 Soit l'équation différentielle $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.

1. A l'aide d'une série entière, trouver une solution particulière non nulle $u(x)$ de l'équation.
2. A l'aide du changement de fonction $y = zu$, trouver la solution générale de l'équation sur $]0,1[$.

Equations aux dérivées partielles

Exercice 4 On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x > 0\}$. On considère $\phi : D \to D$ définie par $\phi(x,y) = (u,v)$ avec $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$.

1. Montrer que la fonction ϕ est un difféomorphisme de D sur D.
2. A l'aide du changement de variables ϕ, résoudre l'équation aux dérivées partielles
$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y.$$
3. Quelle est la solution de l'équation qui vérifie $f(1,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = \sin y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$?

Exercice 5 On considère l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4y. \tag{E}$$

1. En utilisant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x-y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et solutions de l'équation (E).
2. Parmi les solutions trouvées, quelle est celle qui vérifie les conditions supplémentaires $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x,x) = x^2$ et $f(x,-x) = x^3$?

Exercice 6 Le but de cet exercices est de resoudre l'équation aux dérivées partielles suivante
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \exp(y). \tag{E}$$

1. Trouver quatre constantes a, b, c, d telles que, après le changement de variables $u = ax+by$, $v = cx+dy$, l'équation (E) devient
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = g(u,v). \tag{E'}$$
2. Resoudre (E'). Exprimer ensuite le résultat en fonction de x et de y.
3. Trouver la solution de (E) telle que $f(x,0) = 4x^2$ et $f(0,y) = \frac{\exp(y)-1}{4}$.