L2 Math 3 **Septembre 2007**

SÉRIES ENTIÈRES ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Séries entières

Exercice 1 Soit $u(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-2)}$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? Calculer $u(x)$. (Indication : on pourra calculer tout d'abord $u'(x)$.)

Exercice 2 Soit l'équation différentielle $(x^2 + x)u'' + (1 + 3x)u' + u = 0$. Sur $]0; 1[$, trouver une solution particulière u développable en série entière puis la solution générale de la forme $y = zu$.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 3 On note $D =]-\pi/2; \pi/2[\times]-\pi/2; \pi/2[$.

1. On pose $\varphi(x, y) = (u, v)$ avec $u = \sin x$ et $v = \sin y - \sin x$.
   Montrer que la fonction φ est un difféomorphisme de D sur une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ à préciser.
2. À l'aide du changement de variables φ résoudre sur D l'équation
$$\cos x \,.\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \cos y \,.\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x \cos y \,.$$
3. Quelle solution de l'équation vérifie $f(0, 0) = 0$ et $\forall y \in]-\pi/2; \pi/2[$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-y, y) = \sin(2y)$?

Exercice 4 On considère l'équation des cordes vibrantes
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. En utilisant la formule de d'Alembert donner la solution $u(x, t)$ de (E) sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$ vérifiant les conditions initiales $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x, 0) = \sin(2x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin x$.
2. En utilisant le résultat du cours sur la méthode de superposition, donner la solution de (E) sur $[0; l] \times [0; +\infty[$ vérifiant :
   – les conditions aux limites : $\forall t \geq 0 \;\; u(0, t) = u(l, t) = 0$
   – les conditions initiales : $\forall x \in [0; 1] \;\; u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}$.

Exercice 5 On considère l'équation de Laplace
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Par la méthode de séparation des variables, on cherche des solutions de (E) de la forme $u(x, y) = U(x)V(y)$. Montrer alors que les fonctions $U(x)$ et $V(y)$ sont solutions d'équations différentielles $U''(x) - k\,U(x) = 0$ et $V''(y) + kV(y) = 0$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. On choisit $k > 0$ et on note $k = \omega^2$ avec $\omega > 0$. Résoudre les équations différentielles trouvées en 1 et en déduire des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^2$.
3. Parmi les solutions trouvées en 2 figurent les fonctions $u_n(x, y) = e^{-nx} \sin(ny)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a pris $\omega = n$). Par la méthode de superposition, on cherche alors une solution de (E) de la forme
$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-nx} \sin(ny) \,.$$
   Comment choisir les coefficients a_n pour avoir $\forall y \in]-\pi; \pi[\quad u(0, y) = y$? Justifier alors la convergence de la série définissant la fonction $u(x, t)$ pour $x \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Nous admettrons que cette fonction est solution de (E) sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.