Exercice 1. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathbf{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathbf{B}$ est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Déterminer Ker(f) et Im(f), sous-espaces de E. Quel est le rang de f.
2) On note

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_3 \quad ; \quad \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \quad ; \quad \varepsilon_3 = e_1 + e_2.$$

Montrer que $\mathbf{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E. Préciser la matrice de passage P de $\mathbf{B}$ à $\mathbf{B}'$, ainsi que la matrice inverse P^{-1}.
3) Exprimer $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)$ dans la base $\mathbf{B}'$ et en déduire la matrice D de f dans la base $\mathbf{B}'$.
4) Vérifier la rélation $D = P^{-1}AP$.
5) Pour tout entier $n \geq 1$ exprimer la matrice A^n.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. On définit $f : E \to E$ par $f(P(X)) = P(X) + XP'(X)$ où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivée de $P(X)$.
1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathbf{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$. de E.
3) Déduire de 2) que f est une bijection et préciser $f^{-1}(P(X))$ pour

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3.$$

4) Généraliser l'exercice en remplaçant $E = \mathbb{R}_3[X]$ par $E = \mathbb{R}_n[X]$ pour $n \geq 1$.

Exercice 3 Avant de résoudre le système linéaire (S) on précisera les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles le système est de Cramer.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & \alpha z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathbf{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathbf{B}$ est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Déterminer une base $\mathbf{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans laquelle la matrice de F est une matrice diagonale D que l'on précisera.
2) Donner les équations dans la base $\mathbf{B}$ de 3 plans vectoriels de E stables par f.