L2 Math 3 **Septembre 2007**

REDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Exercice 1

1. Trouver une base $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ formée par des vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et préciser une matrice diagonale D semblable à A.
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$ à la base B' et calculer P^{-1}.
3. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle déterminée par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.
   En remarquant que pour tout $n \geq 2$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et u_1 pour $n \geq 2$.

Exercice 2 Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_B(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Trouver une base orthonormée $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_B(f)$ soit diagonale et donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme f.

Exercice 3 Soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. On note $\vec{e_1} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$ et $\vec{e_2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$.

1. Montrer que $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Préciser la matrice de passage P de la base B à la base B'. Vérifier que ${}^tP = P^{-1}$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $M_B(f) = P$, donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme f.
3. On note Ox et Oy les axes de $\mathbb{R}^2$ portant le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Représenter l'hyperbole H ayant pour équation $3X^2 - Y^2 = 3$ dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
4. Quelle est l'équation de H dans le repére canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les points d'intersection de H avec les axes Ox et Oy du repère canonique.

Exercice 4 Soit Γ la conique du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ ayant pour équation dans le repère canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$7x^2 + 13y^2 + 6\sqrt{3}xy + 8x + 8\sqrt{3}y - 12 = 0$$

Trouver l'équation réduite de Γ et représenter Γ.