Corrigé du partiel

Exercice 1

1. En dérivant terme à terme la série entière $f(x)$, on a
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, \quad f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$
On remplace dans l'équation différentielle f, f' et f'' et on trouve (après un changement de variable dans f'')
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0.$$
On obtient $a_2=-a_0$ et $(n+2)a_{n+2}+2a_n=0$, pour tout $n\geq 1$. Donc $a_{n+2}=\frac{-2}{n+2}a_n$ pour tout $n\geq 0$. Soit maintenant $p\geq 1$. On a:
$$a_{2p}=\frac{-2}{2p}a_{2p-2}=\frac{(-2)^2}{2p(2p-2)}a_{2p-4}=\ldots=\frac{(-2)^p}{2p(2p-2)\cdots 4\cdot 2}a_0=\frac{(-1)^p}{p!}a_0.$$

2. $u(0)=a_0$ et $u'(0)=a_1$. Donc $a_1=0$ et il est facile de voir que $a_{2p+1}=0$ pour tout p. D'après le point précédent, $a_{2p}=\frac{(-1)^p}{p!}$. Avec les théorèmes du cours on trouve un rayon de convergence $R=+\infty$ et on reconnaît le DSE de la fonction exponentielle:
$$u(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!}x^{2p}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^p}{p!}=\exp(-x^2).$$

Exercice 2

1. Pour la convergence simple de la suite de fonctions, on fixe $x\in\mathbb{R}$. Si $x=0$, $f_n(0)=0$, donc (on note f la fonction limite) $f(0)=0$. Pour $x\neq 0$, $f_n(x)\overset{\infty}{\sim}\frac{n^2}{n^4}=n^{-2}$ et on obtient $f_n(x)\to 0$. Donc $f(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. On veut montrer la convergence de la série numérique $\sum ||f_n||_\infty$. Sur $[0,1]$, $||f_n||_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|\leq\frac{n^2+n}{n^4}$. Or la série $\sum\frac{n^2+n}{n^4}$ converge car le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$. D'où la convergence normale de la série de fonctions sur $[0,1]$.

Exercice 3

1. La courbe de f pour $\alpha=1/2$ est representée dans la figure.

2. La fonction f est paire et donc $b_n=0$, $\forall n\geq 1$. On a
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\right]_0^{\pi}=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.$$
En utilisant la formule de linéarisation d'un produit de cosinus, on obtient
$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha x)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha x+nx)+\cos(\alpha x-nx)\right)dx=\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha x-nx)}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha x+nx)}{\alpha+n}\right]_0^{\pi}=\frac{\sin(\alpha\pi-n\pi)}{\pi(\alpha-n)}+\frac{\sin(\alpha\pi+n\pi)}{\pi(\alpha+n)}=\\ &= (-1)^n\sin(\alpha\pi)\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}.\end{aligned}$$

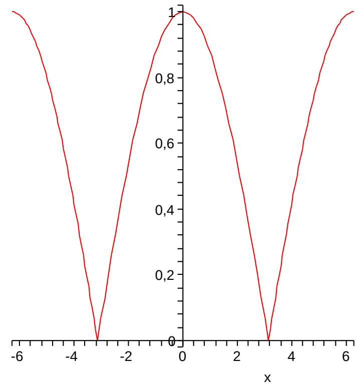

Figure 1: Courbe de f

A la fin, on trouve

$$Sf(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\alpha\pi)\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nx).$$

3. La fonction f est C^1 par morceaux, donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet. f et aussi continue ($f((-\pi)+) = \cos(-\alpha\pi) = \cos(\alpha\pi) = f(\pi)$), et on a $f(x) = Sf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. On prend $x = \pi$ dans $f(x) = Sf(x)$ et on trouve

$$\begin{aligned}\cos(\alpha\pi) &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\alpha\pi)\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos(n\pi) = \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha\pi\sin(\alpha\pi)}{(\alpha\pi)^2-n^2\pi^2},\end{aligned}$$

car $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Pour conclure, il suffit de diviser les deux membres par $\sin(\alpha\pi)$ et de noter $t = \alpha\pi$.

Exercice 4

1. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}v^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{u}{v} + \frac{\partial F}{\partial v}.$$

2. L'équation en F, u, v est $v\frac{\partial F}{\partial v} = 0$. En simplifiant par $v > 0$ on obtient $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ et donc $F(u,v) = a(u)$, où a est une fonction quelconque de classe C^1.

3. En remontant à f, on trouve $f(x,y) = a(xy^2)$.