Partiel Math 3

14 novembre 2007

–Durée 2h.–

Aucun document autorisé, ni calculatrice. Les correcteurs tiendront largement compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Soit (E) l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

1. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une solution développable en série entière, et qu'on suppose de rayon de convergence $R > 0$ ou infini. Trouver une relation entre a_{n+2} et a_n. En déduire pour tout entier p la valeur de a_{2p} en fonction de a_0 et de p.

2. Montrer qu'il existe une solution DSE $u(x)$ qui vérifie $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$. Quel est son rayon de convergence ? Exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 2 Soit la suite de fonctions définie pour tout n par : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{n^2 x + n x^4}{x^2 + n^4}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qu'on déterminera.
2. Soit la série de fonctions $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que s converge normalement sur $[0, 1]$.

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On considère la fonction 2π périodique donnée sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Pour $\alpha = 1/2$, représenter le graphe de la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. On suppose à partir de maintenant que $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Déterminer la série de Fourier Sf de f. On prendra garde au fait que α n'est pas un entier. *Indication* pour les calculs : on pourra utiliser, sans la redémontrer, l'égalité

$$2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b).$$

3. En quels points de $\mathbb{R}$ la série Sf converge-t-elle simplement ? Que vaut alors $Sf(x)$?
4. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\operatorname{cotan}(t) = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Exercice 4 Soit l'équation aux dérivées partielles (E) en les variables $(x, y) \in U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$2x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On considère le changement de variables $u = xy^2$ et $v = y$ (on admet que ce changement de variables est un difféomorphisme de U dans U, et on ne cherchera pas à le démontrer).

1. Soit F la fonction définie par $F(u, v) = f(x, y)$. Déterminez $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de F, u et v.
2. En déduire l' équation aux dérivées partielles vérifiée par F, et la résoudre, toujours en u et v.
3. Déterminez toutes les solutions de (E).