Khôlle n° 1 – Math IV Analyse
26 Février 2007

Partie A

Exercice 1. Les applications suivantes, de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$, sont-elles des distances sur $\mathbf{R}$?

$$d_1(x, y) = \sqrt{|x - y|},$$

$$d_2(x, y) = |x - 2y|.$$

Exercice 2. Soit E un ensemble non-vide et $f : E \to \mathbf{R}$. L'application $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$ de $E \times E \to \mathbf{R}_+$ est-elle une distance sur E ?

Exercice 3. Déterminer la fermeture et l'intérieur de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbf{Q}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ l'application

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Etudier la limite de f à l'origine.

Partie B

Exercice 1. Les applications suivantes, de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$, sont-elles des distances sur $\mathbf{R}$?

$$d_1(x, y) = (x - y)^2,$$

$$d_2(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Exercice 2. Dans $\mathbf{R}$, on pose $d(x, y) = |x| + |y|$, si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$.

a) Montrer que d est une distance.

b) Déterminer $B(1, 1)$, la boule ouverte de centre 1 et de rayon 1, ainsi que sa fermeture.

b) Déterminer $B_f(1, 1)$, la boule fermée de centre 1 et de rayon 1.

Exercice 3. Démontrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ l'application

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Etudier la limite de f à l'origine.

$\boxed{\textbf{Partie C}}$

Exercice 1. Les applications suivantes, de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$, sont-elles des distances sur $\mathbf{R}$?

$$d_1(x, y) = |x^2 - y^2|,$$

$$d_2(x, y) = |x^3 - y^3|.$$

Exercice 2. Soit E un e.v. réel.

a) Si N est une norme sur E, montrer que l'application $d : E \times E \to \mathbf{R}_+$, $d(x, y) = N(x - y)$ définit une distance sur E. Montrer que d vérifie

$$\forall x, y, z \in E, \quad d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall x, y \in E, \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

b) Inversement, si d est une distance sur E vérifiant les idéntintés précedentes, alors l'application $N : E \to \mathbf{R}_+$, avec $N(x) = d(0, x)$ définit une norme sur E.

Exercice 3. Démontrer que $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$.
Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ l'application

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}.$$

Etudier la limite de f à l'origine.