

---

**Khôlle n° 10 – Math IV Analyse**  
**21 Mai 2007**

---

**Partie A**

**Exercice 1.** Déterminer l'aire des parties bornées  $D$  et  $D'$  du plan délimitées respectivement par les courbes d'équations :

1.  $y = x$  et  $y^2 = x$ ;
2.  $y = x$  et  $y = x^2$ . Expliquer le résultat.

**Exercice 2.** En utilisant les coordonnées polaires, calculer  $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ , où  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

**Exercice 3.** Calculer les intégrales triples suivantes:

1.  $\iiint_D 1 dx dy dz$ , où  $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ ;
2.  $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , où  $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, (x/a) + (y/b) + (z/c) \leq 1\}$ , avec  $a, b, c$  des nombres réels  $> 0$ .

**Partie B**

**Exercice 1.** Soit  $D$  la partie du plan délimitée par les droites d'équations respectives  $x = 0$ ,  $y = x + 2$  et  $y = -x$ .

1. Calculer  $\iint_D (x - y) dx dy$ .
2. Calculer cette intégrale au moyen du changement de variables défini par  $u = x + y$  et  $v = x - y$ .

**Exercice 2.** En utilisant les coordonnées polaires, calculer  $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ , où  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } a \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ , avec  $0 < a < 1$ .

**Exercice 3.** Calculer les intégrales triples suivantes:

1.  $\iiint_D 1 dx dy dz$ , où  $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2/h^2, 0 \leq z \leq h\}$  avec  $h > 0$ ;
2.  $\iiint_D y dx dy dz$ , où  $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ .

**Partie C**

**Exercice 1.** Calculer  $\iint_D xy \, dx \, dy$  où  $D$  est la partie du plan délimitée par par les courbes d'équations  $y = x^2$  et  $y = x^3$ .

**Exercice 2.** En utilisant les coordonnées polaires, calculer  $\iint_D (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$ , où  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Exercice 3.** Calculer les intégrales triples suivantes:

1.  $\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz$ , où  $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R, 0 \leq z \leq h\}$  avec  $R, h > 0$  ;
2.  $\iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$ , où  $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ .