
Khôlle n° 11 (révision) – Math IV Analyse
22 Mai 2007

Partie A

Exercice 1. Soit D la partie du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.

1. Calculer $\iint_D (x - y) dx dy$.
2. Calculer cette intégrale au moyen du changement de variables défini par $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 2. Démontrer la formule suivante ($f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ et $U : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ sont des fonctions \mathcal{C}^1):

$$\operatorname{div}(fU) = f \operatorname{div} U + \nabla f \cdot U.$$

Exercice 3. On considère l'application $f(x, y) = \cos y - x \sin y - x^3$. Soit ϕ la fonction qui exprime la deuxième coordonnée en fonction de la première au voisinage du point $(1, 0)$. Justifier l'existence de ϕ et calculer son développement limité à l'ordre 2 au voisinage du point 1.

Partie B

Exercice 1. Calculer $\iint_D xy dx dy$ où D est la partie du plan délimitée par par les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = x^3$.

Exercice 2. Démontrer la formule suivante ($f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ et $U : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ sont des fonctions \mathcal{C}^1):

$$\operatorname{rot}(fU) = f \operatorname{rot} U + \nabla f \wedge U.$$

Exercice 3. On considère l'application $f(x, y) = xy - \sin y + 2x - y$. Soit ϕ la fonction qui exprime la deuxième coordonnée en fonction de la première au voisinage du point $(0, 0)$. Justifier l'existence de ϕ et calculer son développement limité à l'ordre 4 au voisinage du point 0.

Partie C

Exercice 1. En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 2. Démontrer la formule suivante ($f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ et $U : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ sont des fonctions \mathcal{C}^1):

$$\operatorname{div}(fU) = f \operatorname{div} U + \nabla f \cdot U.$$

Exercice 3. On considère l'application $f(x, y) = 2e^{x+y-1} + \ln(x-y) - 2x + y^3$. Soit ϕ la fonction qui exprime la deuxième coordonnée en fonction de la première au voisinage du point $(1, 0)$. Justifier l'existence de ϕ et calculer son développement limité à l'ordre 3 au voisinage du point 1.