
Khôlle n° 2 – Math IV Analyse
12 Mars 2007

Partie A

Exercice 1. Donner un exemple d'application continue $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $U \subset \mathbf{R}$, partie ouverte de \mathbf{R} , telles que $f(U)$ ne soit pas une partie ouverte de \mathbf{R} .

Exercice 2. Soient A et B des parties de \mathbf{R}^n . Démontrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et que $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de continuité des fonctions f définies par les expressions suivantes:

1. $f(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$

2. $f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{\sqrt{y}}$

Partie B

Exercice 1. Donner un exemple d'application continue $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $U \subset \mathbf{R}$, partie fermée de \mathbf{R} , telles que $f(U)$ ne soit pas une partie fermée de \mathbf{R} .

Exercice 2. Soient A et B des parties de \mathbf{R}^n . Démontrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de continuité des fonctions f définies par les expressions suivantes:

1. $f(x, y) = \frac{1}{1-xy}$

2. $f(x, y) = \exp\left(\frac{1}{xy}\right)$

Partie C

Exercice 1. Donner un exemple d'application continue $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $U \subset \mathbf{R}$, partie bornée de \mathbf{R} , telles que $f(U)$ ne soit pas une partie bornée de \mathbf{R} .

Exercice 2. Soient A et B des parties de \mathbf{R}^n . Démontrer que $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de continuité des fonctions f définies par les expressions suivantes:

1. $f(x, y) = \frac{1}{\log(x^2+y^2)}$

2. $f(x, y) = \frac{\sin^2(xy)}{y}$