Khôlle n° 3 – Math IV Analyse
19 Mars 2007

Définitions

Définition 1. Sur $\mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ muni de la métrique euclidienne d on définit la distance entre deux sous-ensembles non vides A et B de $\mathbf{R}^n$ par la formule :

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

Partie A

Exercice 1. Calculer la distance entre les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$: $A = B(0, 1)$ et $B = \{(x, \frac{1}{x}) | x > 0\}$.

Exercice 2. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes:

1. $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$
2. $f(x, y, z) = xy \log z$

Exercice 3. Donner un exemple de partie A de $\mathbf{R}$, coneexe par arcs, et telle que l'intérieur de A ne soit pas connexe par arcs.

Partie B

Exercice 1. Calculer la distance entre les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$: $A = \{(x, 0) | x \in \mathbf{R}\}$ et $B = \{(x, \exp(x)) | x \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 2. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes:

1. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2. $f(x, y, z) = (xy)^z$

Exercice 3. Donner un exemple de partie A de $\mathbf{R}$, qui n'est pas coneexe par arcs, et telle que l'adhèrence de A soit connexe par arcs.

Partie C

Exercice 1. Calculer la distance entre les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$: $A = \{(x, -1) | x \in \mathbf{R}\}$ et $B = \{(x, \exp(-x)) | x \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 2. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes:

1. $f(x, y) = \log \tan \frac{x}{y}$
2. $f(x, y, z) = \log(xy + z)$

Exercice 3. Donner un exemple de partie A de $\mathbf{R}$, coneexe par arcs, et telle que la frontière de A ne soit pas connexe par arcs.

Partie S

Exercice 4. Soit E un evn, $n \in \mathbf{N}$ et $a_1, \ldots, a_n \in E$. Montrer que

$$\left\{ x \in E | \prod_{i=1}^{n} ||x - a_i|| = 1 \right\}$$

est une partie fermée bornée de E.

Exercice 5. Soit $(E, ||\cdot||)$ un evn et $f : E \to E$, $f(x) = \frac{x}{1+||x||^2}$. Montrer que f est continue et que $f(E) = B(0, \frac{1}{2})$.