# Khôlle n° 6 – Math IV Analyse
## 16 Avril 2007

## Partie A

**Exercice 1.** Pour chacune des fonctions suivantes déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et tracer les courbes de niveau $\{(x,y) \in \mathcal{D}_f; f(x,y) = k\}$ pour les valeurs de $k$ indiquées:

1. $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}, \quad k = 0, -1,$
2. $f(x,y) = x - y - |x-y|, \quad k = -3, 17.$

**Exercice 2.** Démontrer la formule suivante ($f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ et $U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$):

$$\operatorname{div}(fU) = f \operatorname{div} U + \nabla f \cdot U.$$

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^2 + y + 1$.

1. Déterminer les points critiques de $f$ sur $\mathbf{R}^2$.
2. Etudier les extrema locaux de $f$ sur $\mathbf{R}^2$.
3. Est-ce que $f$ admet des extrema glodaux dans $\mathbf{R}^2$ ?
4. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; -2 \leqslant x \leqslant 0 \, \text{et} \, -2 \leqslant y \leqslant 0\}$. Déterminer le maximum absolu $M$ et le minimum absolu $m$ de la restriction de $f$ à $D$.

## Partie B

**Exercice 1.** Pour chacune des fonctions suivantes déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et tracer les courbes de niveau $\{(x,y) \in \mathcal{D}_f; f(x,y) = k\}$ pour les valeurs de $k$ indiquées:

1. $f(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy}, \quad k = 1, 2,$
2. $f(x,y) = x - y - |x-y|, \quad k = 0, 1.$

**Exercice 2.** Démontrer la formule suivante ($f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ et $U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$):

$$\operatorname{rot}(fU) = f \operatorname{rot} U + \nabla f \wedge U.$$

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Déterminer les points critiques de $f$ sur $\mathbf{R}^2$.
2. Etudier les extrema locaux de $f$ sur $\mathbf{R}^2$.

3. Est-ce que $f$ admet des extrema glodaux dans $\mathbf{R}^2$ ?

4. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que le maximum absolu $M$ et le minimum absolu $m$ de la restriction de $f$ à $D$ sont atteints sur le bord de $D$.

## Partie C

**Exercice 1.** Pour chacune des fonctions suivantes déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et tracer les courbes de niveau $\{(x,y) \in \mathcal{D}_f; f(x,y) = k\}$ pour les valeurs de $k$ indiquées:

1. $f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}, \quad k = 2,$

2. $f(x,y) = x - y - |x-y|, \quad k = -1, 2.$

**Exercice 2.** Démontrer la formule suivante ($U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ et $V : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$):

$$\operatorname{div}(V \wedge U) = U \cdot \operatorname{rot} V - V \cdot \operatorname{rot} U.$$

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'applcation $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2+1}$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de $f$.

2. Déterminer la norme de $\nabla f(x,y)$. Montrer qu'elle est constante le long du cercle $x^2 + y^2 = r^2$, où $r$ est un réel strictement positif fixé.

3. Trouver le maximum de la dérivée directionnelle $f'_v(3,4)$ avec $||v|| = 1$.

4. Donner l'equation du plan tangent au graphe de $f$ au point $P_0 = (2, 2, \ln 3)$.

**Bibliographie**
Site web de Karim BEKKA : `http://perso.univ-rennes1.fr/karim.bekka`